Ecuaciones Diferenciales - 1° cuatrimestre 2013
ECUACIÓN DE LAPLACE Y POISSON

1. Probar que la ecuación de Laplace
$$\Delta u = 0$$
es invariante por rotaciones; esto es, si O es una matriz ortogonal y definimos $v(x) = u(Ox)$, entonces
$$\Delta v = 0.$$

2. Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre u necesarias para su validez.
   (a) *Combinaciones lineales:* Si u_1 y u_2 son funciones armónicas, entonces $\alpha u_1 + \beta u_2$ es armónica.
   (b) *Homotecias:* Si u es armónica, entonces $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ es armónica.
   (c) *Traslaciones:* Si u es armónica, entonces $u(x - \xi)$ es armónica.
   (d) *Diferenciación respecto a parámetros:* Si $u(x, \gamma)$ es armónica para cada γ, entonces $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x, \gamma)$ es armónica para cada γ.
   (e) *Integración respecto a parámetros:* Si $u(x, \gamma)$ es armónica para cada γ, entonces $\int_a^b u(x, \gamma) d\gamma$ es armónica.
   (f) *Diferenciación respecto a x:* Si u es armónica, entonces $D^\alpha u$ es armónica para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
   (g) *Convoluciones:* Si u es armónica, entonces $\int u(x - \xi)\varphi(\xi) d\xi$ es armónica.

3. Sea u armónica en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, abierto simplemente conexo. Probar que entonces existe v armónica en Ω tal que $u + iv$ es holomorfa.

4. Decimos que $v \in C^2(\Omega)$ es subarmónica si $\Delta v \geq 0$ en Ω.
   (a) Probar que si $v \in C(\overline{\Omega})$ entonces $\max_{\overline{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v$.
   Sugerencia: Probarlo primero suponiendo que v satisface que $\Delta v > 0$ y luego probarlo para $v_\varepsilon(x) := v(x) + \varepsilon|x|^2$ y hacer $\varepsilon \to 0$.
   (b) Probar que si $x_0 \in \Omega$ y $r < d(x_0, \partial\Omega)$, entonces
   $$v(x_0) \leq \fint_{B(x_0,r)} v(\xi) d\xi$$
   (c) Probar que v verifica el principio fuerte del máximo.
   (d) Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa y regular. Si u es armónica y $v = \phi(u)$, entonces v es subarmónica.
   (e) Probar que $v = |\nabla u|^2$ es subarmónica, si u es armónica.

5. Sea u una solución regular de
$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } B_1(0) \\ u = g & \text{en } \partial B_1(0). \end{cases}$$
Probar que existe una constante C, que depende sólo de la dimensión del espacio, tal que
$$\max_{B_1(0)} |u| \leq C \left(\max_{\partial B_1(0)} |g| + \max_{B_1(0)} |f| \right).$$
¿Es cierta la conclusión del ejercicio si cambiamos $B_1(0)$ por Ω un dominio acotado cualquiera?

6. Notemos por B_1^+ a la semiesfera $\{x \in \mathbb{R}^n / \ |x| < 1, x_1 > 0\}$. Sea $u \in C(\overline{B_1^+})$, armónica en B_1^+ con $u = 0$ en $\partial B_1^+ \cap \{x_1 = 0\}$ y notamos $x = (x_1, x')$ con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Definimos
$$U(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x_1 \geq 0, \\ -u(-x_1, x') & \text{si } x_1 < 0, \end{cases}$$
para $x \in B_1(0)$. Probar que U es armónica en $B_1(0)$. Concluir que u es C^∞ hasta $\{x_1 = 0\}$.

7. (a) Sea u una función armónica en $B_1(0)$. Probar que

$$\sup_{B_{1/2}(0)} |\nabla u(x)| \le C \sup_{B_1(0)} |u(x)|,$$

donde C depende sólo de la dimensión del espacio.

(b) Sea u armónica en Ω y sea $\Omega' \subset\subset \Omega$. Probar que entonces se tiene

$$\sup_{\Omega'} |\nabla u| \le C \sup_{\Omega} |u|,$$

donde C es una constante positiva que sólo depende de la dimensión del espacio y de $dist(\Omega', \partial\Omega)$.

(c) Deducir de (a) que si u es armónica en $B_R(0)$, entonces

$$\sup_{B_{R/2}(0)} |\nabla u(x)| \le \frac{C}{R} \sup_{B_R(0)} |u(x)|,$$

donde C es la constante de (a).

(d) Concluir que si u es armónica en $I\!R^n$ y acotada, entonces u es constante.

8. Probar que existe a lo sumo una solución acotada del problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } I\!R^n_+, \\ u = g & \text{en } \partial I\!R^n_+. \end{cases}$$

¿Vale la unicidad si eliminamos la hipótesis de que u sea acotada?

9. Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones armónicas en Ω que converge uniformemente sobre los compactos de Ω a una función u. Probar que u es armónica.

10. Sea $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (Ω acotado), la solución del siguiente problema,

$$\begin{cases} \Delta u_n = 0 & \text{en } \Omega \\ u_n = g_n & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Probar que si $g_n \to g$ uniformemente en $\partial\Omega$, entonces existe $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $u_n \to u$ uniformemente en Ω y $\Delta u = 0$ en Ω.

11. Sea Ω un dominio acotado y sea $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, la solución del siguiente problema,

$$\begin{cases} \Delta u_n = f_n & \text{en } \Omega \\ u_n = g_n & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Probar que si $f_n \to f$ uniformemente en Ω y $g_n \to g$ uniformemente en $\partial\Omega$, entonces existe $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $u_n \to u$ uniformemente en Ω y, más aún, u es solución de

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

en el siguiente sentido débil:

$$\int_\Omega u\Delta v dx = \int_\Omega f v dx, \text{para toda } v \in C_0^\infty(\Omega).$$

12. *Teorema de Harnack de convergencia monótona.*

Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesion monótona de funciones armónicas en un dominio Ω, entonces la sucesión converge en todo punto o diverge en todo punto. En el primer caso, la convergencia es uniforme sobre compactos y el límite es una función armónica.

13. Probar que si u es armónica en $I\!R^n$ y $|u(x)| \le C(1 + |x|^k)$, entonces u es un polinomio de grado a lo sumo k.

14. Probar que si el problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene una solución en Ω acotado ($u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$) entonces

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_{\partial\Omega} g(x)\, dS.$$

Relacionar con el ejercicio 10 de la práctica 1.

15. Sea Ω un dominio con borde regular. Probar que si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución de

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces u es constante.

16. Una función $u \in C(\Omega)$ se dice subarmónica (superarmónica) en Ω si para cada bola $B \subset\subset \Omega$ y para cada función h armónica en B que satisface $u \leq h$ ($u \geq h$) en ∂B, se tiene que $u \leq h$ ($u \geq h$) en B.

   (a) Mostrar que si $u \in C^2(\Omega)$, u es subarmónica (según esta definición) si y sólo si $\Delta u \geq 0$.

   (b) Si u es subarmónica en Ω, entonces satisface el principio fuerte del máximo; y si v es superarmónica en Ω acotado, con $v \geq u$ en $\partial\Omega$, entonces $v > u$ en Ω o $v \equiv u$.

   (c) Sea u subarmónica en Ω y $B \subset\subset \Omega$. Notamos con $\widetilde{u}$ la función armónica en B (dada por la integral de Poisson) que satisface $\widetilde{u} = u$ en ∂B. Definimos el *levantamiento armónico* de u en B por

   $$U(x) = \begin{cases} \widetilde{u}(x), & x \in B, \\ u(x), & x \in \Omega - B. \end{cases}$$

   Entonces U es subarmónica en Ω.

   (d) Si $u_1, \ldots, u_N$ son subarmónicas en Ω, entonces

   $$u(x) = \max\{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$$

   es subarmónica en Ω.

   (e) Enunciar y demostrar los correspondientes resultados para funciones superarmónicas.

17. *Principio débil del máximo*

   Sea

   $$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

   donde a_{ij}, b_i y c son funciones continuas en $\overline{\Omega}$ y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. La matriz (a_{ij}) es simétrica y definida positiva para cada $x \in \overline{\Omega}$ (un operador $\mathcal{L}$ con estas propiedades se dice *elíptico*). Probar que si $\mathcal{L}u \geq 0$ en Ω y $c \equiv 0$ entonces el máximo de u se alcanza en $\partial\Omega$.

   Sugerencia: Usar que si A, B son matrices simétricas y semidefinidas positivas de $n \times n$, entonces $\operatorname{tr}(AB) \geq 0$. ¿Por qué es cierto?

18. (a) Sea $\mathcal{L}u$ el operador definido en el ejercicio anterior y supongamos que $c \leq 0$ in Ω. Si $\mathcal{L}u \geq 0$, entonces

   $$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$$

   donde $u^+ = \max(u, 0)$.

   (b) Dar un contraejemplo para (a) si $c > 0$.

(c) Sea Ω acotado y $c \leq 0$. Si $\mathcal{L}u = \mathcal{L}v$ en Ω y $u = v$ en $\partial\Omega$ entonces $u = v$ en Ω.

(d) Dar un contraejemplo para (c) si Ω no es acotado.

19. *Lema de Hopf.* Sea Ω un dominio con la propiedad que para todo $x_0 \in \partial\Omega$, existe una bola $B_r(y) \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B_r(y)$ (esto se conoce como la propiedad de bola tangente interior). Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u \geq 0$ en Ω, $x_0 \in \partial\Omega$ y $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$. Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$$

20. Usar el lema de Hopf para dar otra demostración del principio fuerte del máximo.