Ecuaciones Diferenciales – 1° cuatrimestre 2013

Práctica 0 – Preliminares

1. Revisar los siguientes teoremas:

   (a) Teorema de la Función Inversa.

   (b) Teorema de la Función Implícita.

   (c) Teorema de Arzelá – Ascoli.

   (d) Teorema de la Partición de la Unidad.

   (e) Teorema de convergencia monótona de Beppo Levi.

   (f) Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

   (g) Lema de Fatou.

2. Diferenciación bajo el signo integral.

   (a) Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $V \subset \mathbb{R}^m$ medible, $f : U \times V \to \mathbb{R}$ medible y $x_0 \in U$. Si $f(x, \cdot) \in L^1(V)$ para $|x - x_0| < \varepsilon$, $f(\cdot, y)$ es diferenciable en $|x - x_0| < \varepsilon$ para casi todo $y \in V$ y existe $g \in L^1(V)$ tal que

   $$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\right| \leq g(y) \ , \ |x - x_0| < \varepsilon \ , \text{ a.e. } y \in V$$

   con $1 \leq j \leq n$ fijo, entonces la función $F(x) = \displaystyle\int_V f(x, y)\, dy$ es derivable para $|x-x_0| < \varepsilon$ respecto de x_j, y

   $$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_V \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\, dy.$$

   (b) Verificar que si $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ es una función continua en $U \times \overline{V}$, con V abierto acotado, entonces verifica las hipótesis del item anterior.

3. (a) Sean f, g derivables, h continua. Derivar

   $$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(s)\, ds.$$

   (b) Sean f, g derivables, $h = h(x, s)$ continua y derivable respecto de x, $\frac{\partial h}{\partial x}$ acotada. Derivar

   $$G(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(x, s)\, ds.$$

4. (a) Desigualdad de Hölder: Si $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces

   $$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

   (b) Desigualdad de Minkowsky: Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces

   $$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

   (c) Desigualdad integral de Minkowsky: Si $1 \leq p < \infty$, entonces

   $$\left(\int \left|\int f(x, y)\, dx\right|^p dy\right)^{1/p} \leq \int \left(\int |f(x, y)|^p\, dy\right)^{1/p} dx.$$

Definiciones: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f\colon U \to \mathbb{R}$ una función continua. Se define el *soporte* de f como $\operatorname{sop}(f) = \overline{\{x \in U\colon f(x) \neq 0\}}$.

- $C^0(U) := \{f\colon U \to \mathbb{R}\colon f \text{ es continua}\} = C(U)$
- $C_c^0(U) := \{f \in C^0(U)\colon \operatorname{sop}(f) \text{ es compacto}\} = C_c(U)$
- $C^1(U) := \{f \in C^0(U)\colon f \text{ es diferenciable en } U \text{ y } \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(U),\ 1 \leq i \leq n\}$
- $C^k(U) := \{f \in C^1(U)\colon \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{k-1}(U),\ 1 \leq i \leq n\},\ k \geq 1$
- $C^\infty(U) = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(U)$
- $C_c^k(U) = C^k(U) \cap C_c^0(U),\ k \geq 1$
- $C_c^\infty(U) = C^\infty(U) \cap C_c^0(U)$
- $C^k(\overline{U}) = \displaystyle\bigcap_{\substack{V \text{ abierto} \\ \overline{U} \subset V}} C^k(V)$

Notación: La siguiente notación para las derivadas será de mucha utilidad. Sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multiíndice, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Definimos $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Entonces se denota, para $f \in C^{|\alpha|}(U)$,

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

5. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$, $\tau_{-h} f(x) := f(x+h)$.

   (a) Para $1 \leq p < \infty$, $\lim_{h \to 0} \|\tau_{-h} f - f\|_p = 0$.
   (Pista: usar que $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p < \infty$).

   (b) Mostrar que (a) no vale para $p = \infty$.

Definición: Dadas f, g medibles en $\mathbb{R}^n$ se define la *convolución* de f y g como

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy$$

para los $x \in \mathbb{R}^n$ en donde la integral esté bien definida.

6. Desigualdad de Young.

   Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n),\ g \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p \leq \infty$. Entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

7. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y se tiene que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$. Más aún, $f * g$ es uniformemente continua.

   Definición: Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible. Definimos

$$L^p_{\text{loc}}(E) := \bigcap_{\substack{K \subset E \\ K \text{compacto}}} L^p(K).$$

8. Sean $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ $(k \in \mathbb{N}),\ g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g,\ |\alpha| \leq k$.

9. (a) Sea

$$\rho(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

   Probar que $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Construir $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathrm{sop}(\rho) \subset B(0,\varepsilon),\ \varepsilon > 0$.

10. Sea $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$, y $\forall \varepsilon > 0$. Sea $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$. Probar que

    (a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \le p < \infty \Rightarrow \|f * \rho_\varepsilon - f\|_p \to 0$ si $\varepsilon \to 0$.

    (b) Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, f uniformemente continua en $V \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\sup_{x\in V'} |f * \rho_\varepsilon(x) - f(x)| \to 0$ si $\varepsilon \to 0$, $\forall V'$ compacto, $V' \subset V$.

    (c) Si f es continua y acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces $f * \rho_\varepsilon$ tiende uniformemente a f en cada compacto de $\mathbb{R}^n$.

    (d) Si además $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

    (e) Calcular $f * \rho_\varepsilon$ si $f = \chi_{[a,b]}$ y ρ es la función del ejercicio 9 (a).

11. Demostrar que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$.

    Pista: las funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto son densas en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$.

12. Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$.

    Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ y $\int_\Omega f\varphi\,dx = 0\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow f = 0$ c.t.p.

13. Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ y $\int f\varphi'\,dx = 0\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f = \mathrm{cte}$ c.t.p.

    Pista: tomar $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\int g = 1$ y para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, se verifica que $\varphi(x) - (\int \varphi)g(x)$ es la derivada de una función $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Definición: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Diremos que Ω es un dominio con frontera C^r si es conexo y para todo $x_0 \in \partial\Omega$ existe un entorno U de x_0, un entorno $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ y una función $\phi \in C^r(V)$ tal que (salvo un reordenamiento de las variables) el dominio se describe como sigue:

$$\Omega \cap U = \{x \in U :\ (x_1, ..., x_{n-1}) \in V;\ x_n > \phi(x_1, ..., x_{n-1})\},$$
$$\partial\Omega \cap U = \{x \in U :\ (x_1, ..., x_{n-1}) \in V;\ x_n = \phi(x_1, ..., x_{n-1})\}.$$

Notaciones:

- El operador *nabla* se define como

$$\nabla := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}).$$

- Dada $u \in C^1(U)$ se define el *gradiente* de u como

$$\mathrm{grad}(u) := \nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}).$$

- Dada $\vec{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ con $f_i \in C^1(U)$ se define la *divergencia* de $\vec{F}$ como

$$\mathrm{div}(\vec{F}) := \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

- Dada $u \in C^2(U)$ se define el *laplaciano u operador de Laplace* de u como

$$\Delta u := \mathrm{div}(\mathrm{grad}(u)) = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

14. Fórmulas de Green

    Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$ con frontera C^1

(a) si $\vec{V} = \vec{V}(x) = (v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x))$, $v_i \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $1 \leq i \leq n$, entonces

$$\int_\Omega \nabla \cdot \vec{V}(x)\, dx = \int_\Omega \operatorname{div} \vec{V}(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{V}(x) \cdot \nu(x)\, dS_x,$$

donde $\nu = \nu(x)$ es el vector normal exterior unitario a $\partial\Omega$.

(b) si $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

$$\int_\Omega (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS_x,$$

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS_x,$$

donde $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$.

15. Recordar de Análisis Complejo:

(a) Usando el Teorema de Cauchy calcular

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+iy)^2}\, dx.$$

(b) Determinar, usando el Teorema de Residuos, el valor de la integral en función del parametro a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\, dx.$$

16. Un resultado de Álgebra para usar mas adelante en la práctica de Ecuación de Laplace:

Sean A, B matrices simétricas y semidefinidas positivas de $n \times n$. Probar que $\operatorname{tr}(AB) \geq 0$.