CLASE: EQUIVALENCIA DE NORMAS

A. SALORT - 6/2013

1. Desigualdad de Poincaré

Theorem 1.1 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, conexo y acotado. Entonces existe una constante $C = C(n, \Omega)$ tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^2(\Omega)}$$

para cada $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Proof. Sea $Q = (0, a)^n$ un cubo en $\mathbb{R}^n$ que contiene a $\bar{\Omega}$. Dada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ denotamos por $\tilde{u}$ a la extensión por cero de u al cubo Q. Tenemos entonces que $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, y obviamente

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|\tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Para cualquier función $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$u(x) = u(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{x_n} u_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt.$$

Aplicando Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 = \left| \int_0^{x_n} u_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt \right|^2 &\leq |x_n| \int_0^{x_n} |u_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, t)|^2 \, dt \\ &\leq a \int_0^a |u_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, t)|^2 \, dt. \end{aligned}$$

Si integramos la desigualdad sobre Ω obtenemos

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq a^2 \int_\Omega |u_{x_n}|^2 dx \leq a^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Por lo tanto,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq a\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

para toda $u \in C_0^\infty(\Omega)$, luego por densidad para toda $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

□

De la prueba se ve que es suficiente con que el dominio esté acotado solamente en una dirección.

El siguiente resultado muestra que basta con que la función se anule solo en una región del borde para que valga la desigualdad de Poincaré.

Theorem 1.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, conexo y acotado. Supongamos ademas que $\partial\Omega$ es Lipchitz y que $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde Γ_1 y Γ_2 son disjuntos y de medida positiva. Entonces existe una constante $C = C(n, \Omega)$ tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^2(\Omega}$$

para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u|_{\partial\Omega} = 0$ sobre Γ_1.

Cuando consideramos funciones en $W^{1,2}(\Omega)$ la desigualdad de Poincaré no es cierta ya que ahora también tenemos a las constantes. En ese caso tenemos la siguiente desigualdad de Poincaré-Wirtinger.

Theorem 1.3 (Desigualdad de Poincaré-Wirtinger)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, conexo y acotado con borde C^1. Entonces existe una constante $C = C(n, \Omega)$ tal que*

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^2(\Omega}$$

para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Proof. Supongamos que la desigualdad es falsa. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una función $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\|u_k - \bar{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \geq k\|Du_k\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Si para cada k definimos la función normalizada

$$v_k := \frac{u_k - \bar{u}_k}{\|u_k - \bar{u}_k\|_{L^2(\Omega)}},$$

obviamente se tiene que $\bar{v}_k = 0$ y $\|v_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Por lo tanto, reemplazando en (1.1) tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\|Dv_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{k}.$$

Particularmente la sucesión $\{v_k\}_k$ es acotada en $W^{1,2}(\Omega)$ (ya que $\|v_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$ y $\|Dv_k\|_{L^2(\Omega)} < 1/k$). Por lo tanto existe una subsucesión $\{v_{k_j}\}$ y una función $v \in L^2(\Omega)$ tal que

$$v_{k_j} \rightharpoonup v \quad L^2(\Omega)$$

pero por la inclusión compacta $W^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$

$$v_{k_j} \to v \quad L^2(\Omega).$$

Por como se definió la sucesión v_k, el límite satisface que $\bar{v} = 0$ y $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Pero ahora, si tomamos $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ test, para cada $i = 1, \dots, n$

$$\int_\Omega v\varphi_{x_i} dx = \lim_{k_j \to \infty} \int_\Omega v_{k_j}\varphi_{x_i} dx = -\lim_{k_j \to \infty} \int_\Omega v_{k_j,x_i}\varphi dx = 0$$

ya que $v_{k_j,x_i} \to 0$ si $k_j \to \infty$ por ser $v_{k_j,x_i} < 1/k$. Consecuentemente, $v \in W^{1,2}(\Omega)$ satisface que $Dv = 0$ c.t.p. Por lo tanto v es constante en Ω, pero como $\bar{v} = 0$ concluimos que $v \equiv 0$. Pero por construcción $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$, absurdo. □

2. Equivalencia de normas en $W_0^{1,2}(\Omega)$

Recordemos que dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definimos $W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| = 1\}$, donde α es un multiíndice y las derivadas son en el sentido débil. Este espacio de de Banach con la norma

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.1}$$

A la clausura de de las funciones $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{1,2}(\Omega)$ las denotamos $W_0^{1,2}(\Omega)$. Se puede interpretar al espacio $W_0^{1,2}(\Omega)$ como a las funciones $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tales que "$u = 0$ sobre $\partial\Omega$".

Dada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ denotamos por $\bar{u}$ al promedio de u sobre Ω. La desigualdad de Poincaré nos asegura que si Ω es un conjunto abierto, acotado y conexo en $\mathbb{R}^n$ con borde C^1, entonces existe una constante $C = C(n, \Omega)$ tal que

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^2(\Omega)}.$$

Particularmente, se puede probar que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ es equivalente a que $u|_{\partial\Omega} = 0$ sobre $\partial\Omega$, donde la desigualdad de Poincaré da la siguiente desigualdad

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^2(\Omega)}.$$

Usando esta desigualdad, si $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ podemos probar que que $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ es una norma equivalente en $W_0^{1,2}(\Omega)$:

$$\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Du\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (1 + C^2)\|Du\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

$$\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Du\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

3. Equivalencia de normas en $W_0^{2,2}(\Omega)$

Recordemos que dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definimos $W^{2,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| = 2\}$, donde α es un multiíndice y las derivadas son en el sentido débil. Este espacio de de Banach con la norma

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.1}$$

Una norma equivalente a (3.1) es la siguiente

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.2}$$

A la clausura de de las funciones $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{2,2}(\Omega)$ las denotamos $W_0^{2,2}(\Omega)$. Se puede interpretar al espacio $W_0^{2,2}(\Omega)$ como a las funciones $u \in W^{2,2}(\Omega)$ tales que "$D^\alpha u = 0$ sobre $\partial\Omega$" para $|\alpha| \leq 1$.

Lo que vamos a probar es que dada $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$, $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ es una norma equivalente a (3.2). Para ello buscaremos cotas inferiores y superiores de los sumandos de (3.2).

Cuando $|\alpha = 1|$ obtenemos la siguiente cota superior

$$\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega u^2_{x_i} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \right)^{\frac{1}{2}} = n\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

y usando que $(\sum x_i)^{\frac{1}{2}} \leq \sum x_i^{\frac{1}{2}}$ tenemos una cota inferior

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u^2_{x_i} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega u^2_{x_i} \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Cuando $|\alpha = 2|$ obtenemos la siguiente cota superior

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} &= \sum_{i,j=1}^n \left(\int_\Omega u^2_{x_i x_j}\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i,j=1}^n \left(\int_\Omega u_{x_i x_j x_i} u_{x_j}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left(\int_\Omega u_{x_i x_i} u_{x_j x_j}\right)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{i,j=1}^n \left(\left(\int_\Omega u^2_{x_i x_i}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u_{x_j x_j}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \sum_{i,j=1}^n \left(\left(\int_\Omega |\Delta u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\Delta u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = n^2 \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

y usando que $(\sum x_i)^2 \le c \sum x_i^2$ y $(\sum x_i)^{\frac{1}{2}} \le \sum x_i^{\frac{1}{2}}$ tenemos una cota inferior

$$\begin{aligned}
\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\Delta u|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_\Omega |\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le c \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega u^2_{x_i x_i}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le c \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega u^2_{x_i x_i}\right)^{\frac{1}{2}} \le c \sum_{i,j=1}^n \left(\int_\Omega u^2_{x_i x_j}\right)^{\frac{1}{2}} = c \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos probado que una norma equivalente a la de $W_0^{2,2}(\Omega)$ es la siguiente

$$\|u\|_{W_0^{2,2}(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$$

Observemos que si $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ vale que

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega u^2_{x_i} = \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i} u_{x_i} = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega u u_{x_i x_i} \\
&\le \sum_{i=1}^n \int_\Omega |u u_{x_i x_i}| \le \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega u^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u^2_{x_i x_i}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega u^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\Delta u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le n \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando la desigualdad de Poincaré obtenemos que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \le c \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Combinando todo esto podemos escribir las dos siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W_0^{2,2}(\Omega)} &= \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le (1+c) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \le C \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \le \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{W_0^{2,2}(\Omega)}$$

References

[1] R. Adams & J. Fournier, *Sobolev Spaces*
[2] L. Evans, *Partial Differential Equations*
[3] D. Gilbarg & N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*