Práctica 9

1. Para las siguientes funciones, hallar los puntos críticos y analizar cuáles de ellos son máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura.

   a) $f(x,y) = (2x+1-y)^2$
   b) $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$
   c) $f(x,y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$
   d) $f(x,y) = x^2 - y^2$
   e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x$
   f) $f(x,y) = xy$
   g) $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$
   h) $f(x,y) = \ln(2x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 1)$
   i) $f(x,y) = x^2 e^{-y}$
   j) $f(x,y) = \begin{cases} e^{1/x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. Hallar los extremos de $f|_A$ en los casos siguientes

   a) $f(x,y) = xy(x-y)^2 \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0 \ , \ y > 0\}$
   b) $f(x,y) = xy(x-y)^2 \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geqslant 0 \ , \ y \geqslant 0\}$
   c) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| \leqslant 3 \ , \ |y| \leqslant 3\}$

3. Una empresa produce ventanas del mismo tipo en dos plantas distintas. La función conjunta del costo de fabricación es $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 - 700x - 210y + 100$, donde x indica la cantidad de unidades producida en la primer planta e y las unidades producidas en la segunda planta. ¿Cuántas unidades se deben producir en cada planta a fin de minimizar los costos?

4. Hallar tres números positivos cuya suma sea 100 y cuyo producto sea mínimo.

5. Se quiere construir una caja rectangular sin tapa cuyo volumen sea 256 cm^3. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que la superficie total sea mínima?

Apéndice: Definiciones y Resultados

Extremos Libres

Extremos: máximos y mínimos

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, U abierto, $\mathbf{a} \in U$. Se dice que en $\mathbf{a}$

⋆ f tiene un ***mínimo local (resp.: estricto)*** si existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(\mathbf{a}) \leqslant f(\mathbf{x}) \qquad \text{(resp.:} \quad f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x}))$$

para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$.

⋆ f tiene un ***máximo local (resp.: estricto)*** si existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(\mathbf{a}) \geqslant f(\mathbf{x}) \qquad \text{(resp.:} \quad f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x}))$$

para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$.

⋆ f tiene un ***extremo local*** si tiene un máximo o un mínimo local.

⋆ f tiene un ***punto crítico o estacionario*** si f es diferenciable en $\mathbf{a}$ y $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

⋆ f tiene un ***punto de ensilladura*** si en $\mathbf{a}$ hay un punto crítico que no es extremo.

Observación

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo local en el punto $\mathbf{a} \in U$ y $\mathbf{g} : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva tal que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{a}$, entonces $f \circ \mathbf{g}$ tiene en 0 el mismo tipo de extremo y con el mismo valor que f.
En consecuencia,

⋆ si existe una curva $\mathbf{g}$ tal que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{a}$ y $f \circ \mathbf{g}$ **no** tiene extremo en 0, entonces f **no** tiene extremo en $\mathbf{a}$.

⋆ si existen dos curvas $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ tales que $\mathbf{g}_i(0) = \mathbf{a}$, $f \circ \mathbf{g}_1$ tiene máximo local en 0 y $f \circ \mathbf{g}_2$ tiene mínimo local en 0, entonces f **no** tiene extremo en $\mathbf{a}$.

Proposición

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, U abierto. Todo punto donde hay un extremo de f es punto crítico.

Teorema

Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2, U abierto y $\mathbf{a} \in U$ un punto crítico de f.

a) Si para todo $\mathbf{x}$ en un entorno de $\mathbf{a}$, $Hf(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa (resp.: positiva) entonces f tiene un máximo (resp.: mínimo) local en $\mathbf{a}$.

b) Si $Hf(\mathbf{a})$ es definida negativa (resp.: positiva) entonces f tiene un máximo (resp.: mínimo) local estricto en $\mathbf{a}$.

c) Si f tiene un máximo (resp. mínimo) local en $\mathbf{a}$, entonces $Hf(\mathbf{a})$ es semidefinida negativa (resp.: positiva).

Teorema *(Criterio de la derivada segunda)*

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2, U abierto. En $(a, b) \in U$ hay un

⋆ *mínimo local estricto* si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $\nabla f(a, b) = 0$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$

c) $\det(MHf(a, b)) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\right)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right)^2 > 0$

⋆ *máximo local estricto* si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $\nabla f(a, b) = 0$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$

c) $\det(MHf(a, b)) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\right)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right)^2 > 0$

⋆ *punto de ensilladura* si $\det(MHf(a, b)) < 0$.