FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Complementos de Análisis

Maestría en Estadística Matemática Primer Cuatrimestre 2013

Práctica 7

1. Dados los vectores $v = (1, 2)$ y $w = (3, -1)$ hallar gráfica y análiticamente los siguientes vectores:
$$v + w \qquad -3v \qquad 2(v - w) \qquad 3v + 2w$$

2. Calcular el perímetro del triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$ y $C = (4. - 1)$

3. Graficar en el plano los siguientes conjuntos:

   a) $\{v \in \mathbb{R}^2 : ||v|| = 3\}$
   b) $\{v \in \mathbb{R}^2 : ||v|| \leqslant 3\}$
   c) $\{v \in \mathbb{R}^2 : ||v|| \geqslant 5\}$
   d) $\{v \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant ||v|| \leqslant 3\}$

4. En cada uno de los siguientes casos hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la condición pedida:

   a) Si $v = (1, k, -1)$, que $\| v \| = 5$
   b) Que sean ortogonales los vectores $(1, 1)$ y $(-5, 2k)$

5. Hallar el ángulo que forman los vectores u y v en cada uno de los siguientes casos:

   a) $u = (-1, 0) \quad v = (-1, -1)$
   b) $u = (3, 1) \quad v = (-1, 3)$
   c) $u = (\sqrt{3}, 1) \quad v = (2\sqrt{3}, -2)$

6. Dibujar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y analizar gráficamente si son abiertos, cerrados, compactos.

   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ | x |< 3 \ , \ | y |< 4\}$
   b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y < 0\}$
   c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y \leqslant 0\}$
   d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leqslant 7\}$

e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 < x^2 + y^2 < 7\}$

f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x + y > 1\}$

g) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 4 \geqslant 2x + y \geqslant 1\}$

h) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \neq 0 \ , \ y \neq 0\}$

7. Analizar la existencia de los límites de las siguientes funciones en el origen:

a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{y}$

d) $f(x,y) = y \operatorname{sen}(\frac{x}{y})$

e) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

f) $f(x,y) = (x^2+y^2) \operatorname{sen}(\frac{1}{xy})$

8. Probar por definición que

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} x + y = 1$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,9)} xy = -9$

9. Analizar la continuidad de las siguientes funciones

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ 1 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = |y|$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 - y^2}{(x-1)^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (1,0) \end{cases}$

Apéndice: Definiciones y Resultados

Operaciones con vectores *Suma* Dados $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, con coordenadas $(v_1, \ldots, v_n)$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, con coordenadas $(w_1, \ldots, w_n)$ se define la suma como:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$$

La suma es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro ($\mathbf{0}$=(0,...,0)) y todo elemento tiene inverso (el inverso de $(v_1, \ldots, v_n)$ es $(-v_1, \ldots, -v_n)$).
Producto por un escalar Dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se define:

$$\alpha\mathbf{v} = (\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n)$$

Propiedades

1. $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$
2. $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$
3. $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$
4. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Norma de un vector

Dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, con coordenadas $(v_1, \ldots, v_n)$, llamamos ***norma de v*** al número

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$$

Propiedades

1. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
2. $\|a.\mathbf{u}\| = |a| \; \|\mathbf{u}\| \qquad (a \in \mathbb{R})$
3. $|u_i| \leqslant \|\mathbf{u}\| \leqslant |u_1| + \cdots + |u_n|$ para todo $i = 1, \ldots, n$
4. $\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \leqslant |\; \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \;| \leqslant \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$

Producto escalar

Dados $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbb{R}^3$, se define el ***producto escalar entre*** $\mathbf{u}$ ***y*** $\mathbf{v}$ como el número

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Propiedades

▷ $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\alpha$ $\quad$ (α = ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$)

▷ $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leqslant \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$ $\quad$ *Desigualdad de Schwarz*

▷ $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales

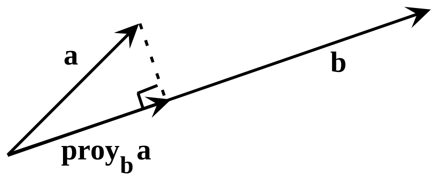
▷ $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$

Proyección ortogonal

Sea $\mathbf{b}$ un vector no nulo. La ***proyección ortogonal del vector* a *sobre* b** es el vector

$$\mathrm{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}\,\mathbf{b}$$

el número $\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}$ se llama ***componente de* a *en la dirección de* b**.



Conceptos topológicos

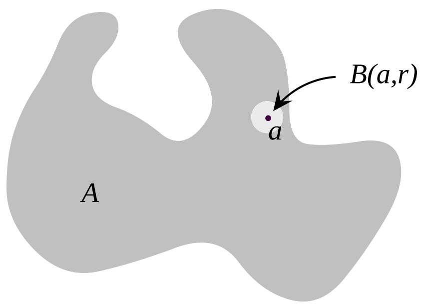
Bola abierta de centro a y radio $r > 0$: $\quad B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$

Bola cerrada de centro a y radio $r > 0$: $\quad \bar{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leqslant r\}$

Conjunto acotado: si está contenido en $B(\mathbf{0}, r)$ para algún $r > 0$

Entorno de a $\in \mathbb{R}^n$: es un conjunto E que contiene una bola abierta centrada en $\mathbf{a}$

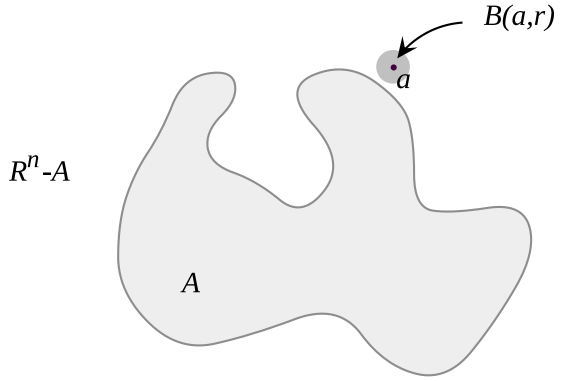
Conjunto abierto: es un conjunto que es entorno de cada uno de sus puntos. Es decir, un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es ***abierto*** si para cada $\mathbf{a} \in A$ existe un $r > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, r) \subset A$.



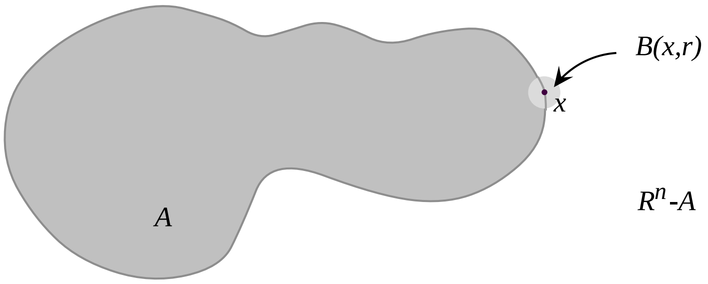
Punto interior: $\mathbf{a} \in A$ es un ***punto interior*** de A si existe un entorno de $\mathbf{a}$ contenido en A.

Interior de un conjunto: $\overset{\circ}{A} = \{\mathbf{a} \in A \;/\; \mathbf{a}$ es un punto interior de $A\}$

Conjunto cerrado: es un conjunto cuyo complemento es un conjunto abierto. Es decir, un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es ***cerrado*** si para cada $\mathbf{a} \notin A$ existe un $r > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, r) \cap A = \varnothing$.



Frontera: $\partial A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;/\; B(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \varnothing$ y $B(\mathbf{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n - A) \neq \varnothing$ para todo $r > 0\}$



Conjunto compacto: es un conjunto cerrado y acotado.

Campos escalares

Llamaremos ***campo escalar*** a cualquier función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Límite — Continuidad

Límite

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $\mathbf{a} \in \overline{A}$ y $\ell \in \mathbb{R}$, decimos que el ***límite de*** f ***cuando*** $\mathbf{x}$ ***tiende a*** $\mathbf{a}$ es ℓ —y lo notamos $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell$— cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A \quad \text{y} \quad 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon$$

Proposición (*Unicidad del límite*)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar y $\mathbf{a} \in \overline{A}$. Si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell_1$ y $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell_2$, entonces $\ell_1 = \ell_2$.

Proposición

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $\mathbf{a} \in \overline{A}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell > \alpha$ (resp. $\ell < \alpha$), entonces $f(\mathbf{x}) > \alpha$ (resp. $f(\mathbf{x}) < \alpha$) para $\mathbf{x}$ en un entorno de $\mathbf{a}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.

Proposición

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \overline{A}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell_1$ y $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \ell_2$,

(I) $\lim\limits_{x\to a} (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$

(II) $\lim\limits_{x\to a} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = \ell_1\ell_2$

(III) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ (si $\ell_2 \neq 0$)

Proposición

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in A$ tales que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = 0$ y f es acotada en un entorno de $\mathbf{a} \in A$. Entonces,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0$$

Proposición

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} \in \overline{A}$ tales que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell$. Sean $\varepsilon > 0$, $h : (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{y\to\ell} h(y) = L$ y $\mathbf{g} : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \longrightarrow B(\mathbf{a}, r)$ tal que $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{g}(t) = \mathbf{a}$. Entonces,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h \circ f(\mathbf{x}) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to t_0} f \circ \mathbf{g}(t) = \ell$$

Proposición

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} \in \overline{A}$. Entonces, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(x) = \ell$ si y sólo si

$$f(x_n, y_n) \longrightarrow \ell$$

para toda sucesión $\big((x_n, y_n)\big) \subset A$, $(x_n, y_n) \neq \mathbf{a}$, que converge a $\mathbf{a}$.
NOTA: lo mismo vale para $A \subset \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$.

Corolario

Si $((x_n, y_n))$, $((u_n, v_n))$ son dos sucesiones que convergen al punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para las cuales

$$f(x_n, y_n) \longrightarrow \ell_1 \qquad \text{y} \qquad f(u_n, v_n) \longrightarrow \ell_2$$

con $\ell_1 \neq \ell_2$, entonces no existe el límite de f cuando $(x, y) \to (a, b)$.
NOTA: lo mismo vale en $\mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$.

Proposición *(límite de una composición)*

Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\mathbf{a} \in \overline{A}$ tales que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell$. Entonces,

(I) si la función h está definida en un entorno del número ℓ, toma valores en $\mathbb{R}$ y satisface $\lim\limits_{y\to\ell} h(y) = L$, se tiene

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h \circ f(\mathbf{x}) = L$$

(II) si la trayectoria $\mathbf{g}$ está definida en un entorno del número t_0 y satisface $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{g}(t) = \mathbf{a}$, se tiene

$$\lim_{t\to t_0} f \circ \mathbf{g}(t) = \ell$$

Continuidad

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es ***continua*** en $\mathbf{a} \in A$ si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Se dice que f es ***continua*** en A si es continua en cada uno de sus puntos.

Proposición

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} \in A$. Entonces, f es continua en $\mathbf{a}$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$$

Proposición

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en $\mathbf{a} \in A$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

(I) $\alpha f + \beta g$ es continua en $\mathbf{a}$

(II) fg es continua en $\mathbf{a}$

(III) $\dfrac{f}{g}$ es continua en $\mathbf{a}$ siempre que $g(\mathbf{a}) \neq 0$

(IV) si $h : (f(\mathbf{a}) - \varepsilon, f(\mathbf{a}) + \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $f(\mathbf{a})$, $h \circ f$ es continua en $\mathbf{a}$.

Teorema *(Weierstrass)*

Sea $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces f resulta acotada y además existen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ tales que

$$f(\mathbf{x}_1) \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}_2)$$

para todo $\mathbf{x} \in K$; es decir, f alcanza un valor máximo absoluto $-f(\mathbf{x}_1)-$ y un valor mínimo absoluto $-f(\mathbf{x}_2)-$ en el conjunto K.