PRÁCTICA 3

1. Usando sólo la definición de derivada, calcular:

   a) $f'(1)$ si $f(x) = 2x + 3$ b) $f'(2)$ si $f(x) = 3x^2 - 1$

   b) $f'(1)$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leqslant 1 \\ 2x - 1 & , x > 1 \end{cases}$ d) $f'(0)$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 \ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

2. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geqslant 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases}$. Probar que:

   a) f es derivable en $\mathbb{R}$.

   b) f' es continua en $\mathbb{R}$.

   c) f' no es derivable en $x = 0$.

3. Sea $f : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln |x|$. Probar que f es derivable en $\mathbb{R}_{\neq 0}$ y que $f'(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$.

4. Mostrar que no existe la derivada de las funciones siguientes en los puntos que se indican

   a) $f(x) = |x|$ en $x = 0$

   b) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

5. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los puntos donde eso sea posible

   a) $f(x) = 2x^3 + 3x - 5$

   b) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{x^2-x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{e^x + \operatorname{sen} x}{xe^x}$

e) $\dfrac{x^2+2x+8}{x+1} + \sqrt[3]{x^2-3}$

f) $(\cos x + e^x)\sqrt{x+\sqrt{x}}$

g) $\cos((2x+1)^2)$

h) $x^{\operatorname{sen} x}$

i) $x^x + \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$

6. Si $F(x) = f(g(x))$ y $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$ y $f'(6) = 7$, hallar $F'(3)$.

7. Sea f una función derivable y tal que $f(0) = 0$. Si g es la función:

$$g(x) = 5x.f(x) + f(x^2)$$

Probar que $g'(0) = 0$

8. Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal al gráfico de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ para:

a) $f(x) = sen(x) + 1$ $\qquad x_0 = \frac{\pi}{2}$

b) $f(x) = ln(x^2+1)$ $\qquad x_0 = 0$

c) $f(x) = e^{-x^2}$ $\qquad x_0 = 0$

9. Verificar que la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}$ satisface $f(1) = f(5)$ y que no existe $c \in (1,5)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Qué hipótesis del teorema de Rolle no se cumple?

10. Para la función $f(x) = 3x^2 - 5$, encontrar $c \in (-2,0)$ tal que $f(0) - f(-2) = 2f'(c)$.

11. Comprobar que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ tiene una única raíz real.

12. Sea f derivable en $[a, +\infty)$ tal que $f(a) = 0$ y $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in [a, +\infty)$.

    a) Mostrar que $|f(x)| < x - a$ para todo $x > a$.

    b) Deducir que $\ln(x) < x$ para todo $x > 0$.

    c) Concluir que $e^x > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

13. Probar las desigualdades siguientes:

    a) $e^x > 1 + x$ para todo $x \neq 0$

    b) $\log(x + 1) < x$ para todo $x > 0$

    c) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$

    d) $\operatorname{arc\,tg} x < x$ para todo $x \neq 0$

Curvas

14. Hallar los puntos de la curva $y = x^3 - 3x + 5$ en los que la recta tangente:

    a) es paralela a la recta $y = -2$

    b) es perpendicular a la recta $y = -\dfrac{x}{9}$

15. Analizar la existencia de $\lim\limits_{t \to 0} \sigma(t)$, siendo

    a) $\sigma(t) = (\frac{\operatorname{sen} t}{2t}, e^{2t}, \frac{t^2}{e^t})$

    b) $\sigma(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1-\cos t}{3t}\mathbf{j} + \frac{t}{t+1}\mathbf{k}$

16. Suponiendo que σ es derivable, hallar las derivadas primera y segunda de

    a) $\gamma(t) = t\sigma(t^2)$

    b) $\gamma(t) = t\sigma(\sqrt{t})$

17. Hallar $\sigma'(t)$

    a) $\sigma(t) = (t^3 + t, t^2)$

    b) $\sigma(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 3t)$

Apéndice: Definiciones y Resultados

Función derivable

Sean $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$. Decimos que f es ***derivable en*** x_0 si existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

En caso de existir, ese límite se llama ***derivada*** de f en x_0 y se lo denota $f'(x_0)$.

Decimos que una función f es derivable en el intervalo (a,b) si lo es en cada uno de sus puntos. A la función $f' : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ —que en cada punto x toma el valor $f'(x)$— se la llama ***función derivada*** de f.

Proposición

Toda función derivable es continua.

Propiedades

Sean $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables en x_0, entonces

a) $f+g$ es derivable en x_0 y $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

b) fg es derivable en x_0 y $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

c) si $g(x_0) \neq 0$, entonces f/g es derivable en x_0 y $(f/g)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Regla de la Cadena

Sea f una función derivable en x_0 y g una función derivable en $f(x_0)$. Entonces, la función $g \circ f$ es derivable en x_0 y vale

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Derivadas laterales

Sean $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$. Decimos que f es ***derivable por la derecha en*** x_0 si existe el límite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

En caso de existir, ese límite se llama ***derivada lateral por la derecha*** de f en x_0 y se lo denota $f'_+(x_0)$.

Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Decimos que f es ***derivable por la izquierda en*** x_0 si existe el límite

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En caso de existir, ese límite se llama ***derivada lateral por la izquierda*** de f en x_0 y se lo denota $f'_-(x_0)$.

Recta tangente

Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en el punto $x_0 \in (a, b)$. Se llama ***recta tangente al gráfico de*** f ***en*** x_0 a la recta de ecuación

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Proposición

Toda función derivable en x_0 es continua en x_0.

Clase C^k

Una función f se dice de clase $C^k(a, b)$ si admiten derivadas continuas hasta el orden k en el (a, b).

Teorema de Rolle

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en su interior, y verifica $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto intermedio c tal que $f'(c) = 0$ $(a < c < b)$.

Teorema de Lagrange

Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en su interior. Entonces, existe un punto intermedio c tal que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \qquad (a < c < b)$$

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Notación

Sea $\sigma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \ldots, \sigma_n(t))$. Las funciones $\sigma_i : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ se llaman ***componentes*** de σ.

Límite

Sea $\sigma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in (a,b)$. Se dice que $\sigma(t)$ converge a $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ cuando t tiende a t_0 si σ_i converge a v_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ y lo escribimos: $\lim\limits_{t \to t_0} \sigma(t) = \mathbf{v}$.

Continuidad

Sea $\sigma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in (a,b)$. Se dice que σ es ***continua en*** t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \sigma(t) = \sigma(t_0)$. Decimos que es ***continua en*** (a,b) si es continua en cada $t \in (a,b)$.

Proposición

Sea $\sigma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces,

σ es continua en $t_0 \in (a,b)$ $\iff$ $\sigma_i : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en t_0 para todo $i = 1, \ldots, n$

Derivabilidad

Sea $\sigma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in (a,b)$. Se dice que σ es ***derivable en*** t_0 si existe un vector —denotado $\sigma'(t_0)$— tal que

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{t - t_0} = \sigma'(t_0)$$

Proposición

Sea $\sigma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces,

σ es derivable en $t_0 \in (a,b)$ $\iff$ $\sigma_i : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en t_0 para todo $i = 1, \ldots, n$

En tal caso vale,

$$\sigma'(t_0) = (\sigma_1'(t_0), \ldots, \sigma_n'(t_0))$$

Clase C^k

Una función $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice ***de clase*** C^k si sus componentes son de clase C^k.