FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES — UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Complementos de Análisis

Maestría en Estadística Matemática — Primer Cuatrimestre 2013

Práctica 2

1. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-1}$

   b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)^4-16}{x^2-5x+4}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

   d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

   e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+6}-(-3)}{\sqrt{4x+4}-4}$

   f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$

2. Si $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, ¿es cierto que existe un entorno de 1 para el cual $f(x) < 3$?

   ¿Y que existe un entorno de 1 para el cual $f(x) < 2$? Justificar

3. ¿Tiene sentido buscar un $\delta > 0$ tal que:

   a) $3x^2-5x+1 > 0$ en $(1-\delta\,, 1+\delta)$?

   b) $1-x^2 > 0$ en $\left(\frac{1}{2}-\delta\,,\, \frac{1}{2}+\delta\right)$?

   Si la respuesta es afirmativa, hallarlo.

4. Demostrar cada una de las siguientes afirmaciones empleando la definición de límite.

   a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x}{5} = \dfrac{4}{5}$

   b) $\lim\limits_{x\to 3} 2x^2-6 = 12$

5. Calcular:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{5x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \log(x^2 + 3) - \log(x^2 + 2)$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1 + e^x)}{x}$

e) $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/\operatorname{tg} x}$

f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}$

6. Encontrar el límite, si existe. Si no lo hay, explicar por qué.

a) $\lim_{x \to -4^-} \frac{|\, x + 4 \,|}{x + 4}$

b) $\lim_{x \to -4} \frac{|\, x + 4 \,|}{x + 4}$

c) $\lim_{x \to 1^-} \frac{(x - 1)^2}{|\, x - 1 \,|}$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)^2}{|\, x - 1 \,|}$

e) $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{x(e^x - 1)}{|\, x \,|}$

7. Para cada una de las siguientes funciones

 - ◇ estudiarla en cada punto de su dominio
 - ◇ en los puntos que no pertenezcan al dominio, definirla —si es posible— de modo que resulte continua

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & , \ |x| \leqslant 1 \\ \\ |x-1| & , \ |x| > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & , \ x < 0 \\ \\ -x^2 + \frac{5}{2}\, x & , \ x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2} & , \ x > 0 \\ \\ x^2 + 1 & , \ x \leqslant 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(e^2 x)}{x} & , \ x < 0 \\ \\ (1+2x)^{1/x} & , \ 0 < x < 1 \\ \\ \dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3} + 5 & , \ x > 1 \end{cases}$

8. a) Probar que existe $x \in (1,2)$ tal que $x^3 - 3x + 1 = 0$.
   b) Probar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = x$.
   c) Encontrar un número r tal que $f(x) = x^9 - 100x^4 + 3x^3 + 12$ tenga al menos una raíz real en el intervalo $(-r, r)$.

Apéndice: Definiciones y Resultados

Límite — Continuidad

Definición (Límite)

Sean $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ y $\ell \in \mathbb{R}$, decimos que el ***límite de*** f ***cuando*** x ***tiende a*** x_0 es ℓ, y lo notamos $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (a,b) \quad \text{y} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Proposición (*Unicidad del límite*)

Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_2$, entonces $\ell_1 = \ell_2$.

Proposición

Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell > \alpha$ (resp. $\ell < \alpha$), entonces $f(x) > \alpha$ (resp. $f(x) < \alpha$) para x en un entorno de x_0, $x \neq x_0$.

Proposición

Sean $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$,

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \ell_1\ell_2$

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2} \quad$ (si $\ell_2 \neq 0$)

Proposición

Sean $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ tales que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y f es acotada en un entorno de $x_0 \in (a,b)$. Entonces,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$$

Proposición

Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Entonces, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si y sólo si

$$f(x_n) \longrightarrow \ell$$

para toda sucesión $x_n \in (a, b), n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq x_0$, que converge a x_0.

Corolario

Si x_n e y_n son dos sucesiones que convergen al punto $x_0 \in (a, b)$ para las cuales

$$f(x_n) \longrightarrow \ell_1 \qquad \text{y} \qquad f(y_n) \longrightarrow \ell_2$$

con $\ell_1 \neq \ell_2$, entonces no existe el límite de f cuando $x \to x_0$.

Definición (Continuidad)

Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es ***continua*** en $x_0 \in (a, b)$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Se dice que f es ***continua*** en (a, b) si es continua en cada uno de sus puntos.

Proposición

Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Entonces, f es continua en x_0 si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (a, b) \quad \text{y} \quad |x - x_0| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Proposición

Sean $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en $x_0 \in (a, b)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

(i) $\alpha f + \beta g$ es continua en x_0

(ii) fg es continua en x_0

(iii) $\dfrac{f}{g}$ es continua en x_0 siempre que $g(x_0) \neq 0$

(iv) si $h : (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $f(x_0)$, $h \circ f$ es continua en x_0.

Teorema (Bolzano)

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua. Si f toma un valor positivo y otro negativo, entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

Corolario

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua. Si $f(x_0)\neq 0$ para todo $x_0\in[a,b]$, entonces

$$f>0 \quad \text{en } [a,b] \qquad \text{o} \qquad f<0 \quad \text{en } [a,b]$$

Teorema (de los valores intermedios)

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua. Si $f(x_1)=\alpha$, $f(x_2)=\beta$ y $\alpha<d<\beta$, entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=d$.

Teorema (Weierstrass)

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua. Entonces f resulta acotada y además existen $x_m, x_M\in[a,b]$ tales que

$$f(x_m)\leqslant f(x)\leqslant f(x_M)$$

para todo $x\in[a,b]$.
Es decir, toda función continua en un intervalo cerrado alcanza un valor máximo absoluto $(f(x_M))$ y un valor mínimo absoluto $(f(x_m))$.