FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES | UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Complementos de Análisis

Maestría en Estadística Matemática | Primer Cuatrimestre 2013

Práctica 1

1. a) Mostrar que los siguientes conjuntos están acotados

$$\{n \in \mathbb{N} \ / \ 3 \leqslant n < 59\} \qquad , \qquad \left\{ \frac{1}{x^2+1} \Big/ x \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente

$$\mathbb{R}_{>0} \qquad , \qquad \{m^2 \ / \ m \in \mathbb{N}\}$$

c) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente

$$\mathbb{Z} \qquad , \qquad \{x^{-1} \ / \ x < 0\} \qquad , \qquad \{-x^2 + 2x + 1 \ / \ x \in \mathbb{R}\}$$

2. Sean A , B subconjuntos no vacíos de números reales. Probar

a) $A \subset B$ y B acotado superiormente $\implies$ A está acotado superiormente y $\sup A \leqslant \sup B$

b) $A \subset B$ y B acotado inferiormente $\implies$ A está acotado inferiormente y $\inf B \leqslant \inf A$

c) $A \subset B$ y A no acotado $\implies$ B no acotado.

3. Calcular supremo e ínfimo —si existen— de los siguientes conjuntos

   a) $\{n \in \mathbb{N} \ / \ 20 < n \leqslant 35\}$

   b) $(a, b]$

   c) $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \Big/ n \in \mathbb{N} \right\}$

   d) $\left\{ \frac{1}{n} \Big/ n \in \mathbb{N} \ , \ n \geqslant 30 \right\}$

   e) $\left\{ \frac{2n}{7n-3} \Big/ n \in \mathbb{N} \right\}$

   f) $\{x \in \mathbb{Q} \ / \ 2x^3 - 1 < 15\}$

   g) $\{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \ / \ x^2 + x < 2\}$

4. Hallar los cinco primeros términos de las sucesiones cuyo término general es

   a) $a_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$

   b) $a_n = \dfrac{2 + (-1)^n}{3n}$

   c) $a_n = \operatorname{sen}(n\pi)$

   d) $a_n = \cos(n\pi)$

5. Calcular los límites de las sucesiones siguientes

   a) $\dfrac{n+2}{n^2-6}$

   b) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

   c) $\dfrac{n \cos n}{n^2+1}$

   d) $n \left[\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{2}{n^2-1} \right]$

   e) $\sqrt{n^2+n} - n$

   f) $\dfrac{2^n + 3^n}{3^n + 2} + \dfrac{2n}{n+3}$

6. Demostrar usando sólo la definición de límite que

   a) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2+1}{2n^2-n} = \frac{3}{2}$

   b) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{sen}(n^3+3n-2) - 3}{n} = 0$

7. Para cada una de las sucesiones siguientes

$$a_n = (-1)^n \quad , \quad a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n} \quad , \quad a_n = \frac{1+(-1)^n}{n} \quad ,$$

   a) probar que existen $b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$b_n = a_{2n} \longrightarrow b \qquad \text{y} \qquad c_n = a_{2n+1} \longrightarrow c$$

   b) estudiar la convergencia de (a_n).

8. Comprobar que puede existir $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ $(a_n > 0)$ y no existir $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

   Sugerencia: considerar $a_n = 2 + (-1)^n$

9. Calcular los límites de las sucesiones siguientes

   a) $\sqrt[n]{3^n + 2^n}$
   b) $\dfrac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}$
   c) $\dfrac{n^4 - n + 2^n.n}{(n^3-1)2^n}$
   d) $\sqrt[n]{2n^2 - 1}$
   e) $\dfrac{8^n - 4^n}{3^n}$
   f) $\dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$
   g) $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$
   h) $\dfrac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n^2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$
   i) $\dfrac{3^n - 2^n}{5^n - 4^n}$
   j) $\dfrac{(2n)!}{n^{2n}}$
   k) $\dfrac{a^n}{n^n}$

10. Mostrar —utilizando la definición— que las siguientes sucesiones son de Cauchy

   a) $\dfrac{1}{n}$
   b) $\dfrac{n}{n+1}$

11. Calcular los límites de las sucesiones siguientes

    a) $\dfrac{\left(-1-\dfrac{1}{n}\right)^n}{n}$

    b) $\dfrac{(2n)!}{n^{2n}}$

    c) $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

    d) $\left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n^2+4}{n+1}}$

    e) $\left(\dfrac{2n^2+n-1}{3n^2-6n+1}\right)^{\frac{n+1}{2n}}$

    f) $\dfrac{\ln(e^n-1)}{n}$

    g) $n.\ln(1-e^{-n})$

    h) $\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n$

    i) $\dfrac{n\,\mathrm{sen}(n!)}{n^2+1}$

    j) $\dfrac{\mathrm{sen}(n!+5n-2)+\cos n}{\sqrt{n}+5n-4}$

    k) $\left(\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}-5}\right)^{\mathrm{sen}\,n}$

12. Sean (a_{n_k}) , (a_{n_j}) y (a_{n_i}) tres subsucesiones de la sucesión (a_n). Si se sabe que las tres convergen al mismo límite ℓ, ¿se puede asegurar que $a_n \longrightarrow \ell$? ¿y a otro valor?

13. De la sucesión (a_n) se sabe que las subsucesiones

$$a_{3k} \longrightarrow \ell \quad , \quad a_{3k+1} \longrightarrow \ell \quad , \quad a_{3k+2} \longrightarrow \ell$$

    Probar que $a_n \longrightarrow \ell$. Explicar por qué este resultado no se contrapone con las respuestas del ejercicio anterior.

14. Hallar el límite superior e inferior de

    a) $1 \,,\, 3 \,,\, -1 \,,\, 1 \,,\, 3 \,,\, -1 \,,\, 1 \,,\, 3 \,,\, -1 \,,\, \dots$

    b) $(1-\frac{1}{n})\,\mathrm{sen}(n\frac{\pi}{2})$

    c) $(-1)^n(2+\frac{3}{n})$

d) $(-1)^n n$

e) $\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2})$

15. ¿Es cierto que

a) si $\limsup x_n = 2$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 1,99$ para todo $n \geqslant n_0$?

b) si $\limsup x_n = b$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leqslant b$ para todo $n \geqslant n_0$?

c) si $\limsup x_n = b$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leqslant b + \frac{1}{2}$ para todo $n \geqslant n_0$?

Enunciar y responder situaciones análogas para el límite inferior.

Apéndice: Definiciones y Resultados

Cota superior de un conjunto

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Decimos que el número α es una ***cota superior*** de A si

$$x \leqslant \alpha \qquad \text{para todo } \ x \in A$$

Cota inferior de un conjunto

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Decimos que el número β es una ***cota inferior*** de A si

$$x \geqslant \beta \qquad \text{para todo } \ x \in A$$

Conjunto acotado

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Decimos que

1. A está ***acotado superiormente*** si tiene una cota superior
2. A está ***acotado inferiormente*** si tiene una cota inferior
3. A está ***acotado*** si está acotado superior e inferiormente.

Supremo — Máximo

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente. Un número α se llama ***supremo de*** A si

1. α es cota superior de A
2. si a es cota superior de A, entonces $a \geqslant \alpha$.

Se lo denota: $\sup A$. En caso que $\alpha \in A$, se lo llama ***máximo*** y se lo denota $\max A$.

Infimo — Mínimo

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Un número β se llama ***ínfimo de*** A si

1. β es cota inferior de A
2. si b es cota inferior de A, entonces $b \leqslant \beta$.

Se lo denota: $\inf A$. En caso que $\beta \in A$, se lo llama ***mínimo*** y se lo denota $\min A$.

Axioma de Completitud

Todo subconjunto de los números reales que sea no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

Proposición

Sea A un conjunto acotado superiormente y no vacío. Un número real α es el supremo de A si y sólo si

1. α es cota superior de A
2. para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < x$.

Proposición

Sea A un subconjunto de números reales acotado inferiormente, entonces existe $\inf A$.

Proposición *(Principio de Arquímedes)*

Dado $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant x$.

Corolario

Sean a y b números reales tales que $0 < a < b$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

Proposición *(Densidad de $\mathbb{Q}$)*

Dados dos números reales $a < b$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$a < q < b$$

Proposición *(Densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)*

Dados dos números reales $a < b$, existe $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que

$$a < x < b$$

Desigualdad de Bernoulli

Si $a > -1$, entonces

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Corolario

Si $a > -1$, entonces

$$\sqrt[n]{1+a} \leqslant 1 + \frac{a}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Límite finito

Sea (a_n) una sucesión. Decimos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$$

Sucesión acotada

Sea (a_n) una sucesión. Decimos que es ***acotada*** si existe $M > 0$ tal que

$$|a_n| \leqslant M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición

Toda sucesión convergente es acotada.

Proposición

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones convergentes. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ sus respectivos límites. Entonces

(I) $a_n + b_n \longrightarrow a + b$

(II) $a_n b_n \longrightarrow ab$

(III) Si $b_n \neq 0$ para todo $n \geqslant n_0$, entonces $\dfrac{a_n}{b_n} \longrightarrow \dfrac{a}{b}$

Proposición

Sean (a_n) , (b_n) y (c_n) tres sucesiones tales que

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $a_n \longrightarrow \ell$ y $c_n \longrightarrow \ell$, entonces $b_n \longrightarrow \ell$.

Límite infinito

Sea (a_n) una sucesión. Decimos que $\quad a_n \longrightarrow +\infty \quad$ si para todo $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad a_n > M$$

Análogamente, decimos que $\quad a_n \longrightarrow -\infty \quad$ si para todo $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad a_n < -M$$

Finalmente, decimos que $\quad a_n \longrightarrow \infty \quad$ si para todo $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |a_n| > M$$

Algunos límites especiales

1. $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$

2. $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$

3. $r^n \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ +\infty & \text{si } r > 1 \\ \infty & \text{si } r < -1 \\ \text{no existe} & \text{si } r = -1 \end{cases}$

Criterio de DÁlembert

Sea (a_n) una sucesión de número positivos tales que $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \ell$. Entonces,

(I) si $\ell < 1$, entonces $a_n \longrightarrow 0$

(II) si $\ell > 1$ o $\ell = +\infty$, entonces $a_n \longrightarrow +\infty$

Criterio de Cauchy

Sea (a_n) una sucesión de número positivos tales que $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell$. Entonces,

(I) si $\ell < 1$, entonces $a_n \longrightarrow 0$

(II) si $\ell > 1$ o $\ell = +\infty$, entonces $a_n \longrightarrow +\infty$

Sucesiones monótonas

Sea (a_n) una sucesión de números reales. Se dice que

1. (a_n) es ***creciente*** si
$$a_n \leqslant a_{n+1}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. (a_n) es ***estrictamente creciente*** si
$$a_n < a_{n+1}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. (a_n) es ***decreciente*** si
$$a_n \geqslant a_{n+1}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. (a_n) es ***estrictamente decreciente*** si
$$a_n > a_{n+1}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición

Toda sucesión monótona creciente (decreciente) y acotada superiormente (resp. inferiormente) tiene límite y su valor es el supremo (resp. ínfimo) de $\{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

Proposición *(Definición de e)*

La sucesión $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$ es estrictamente creciente y acotada superiormente. A su límite se lo denota

$$e = \text{lím } (1+\tfrac{1}{n})^n$$

Sucesión de Cauchy

Sea (a_n) una sucesión. Decimos que (a_n) ***es de Cauchy*** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Proposición

Sea (a_n) una sucesión de números reales. Entonces, (a_n) es de Cauchy $\Leftrightarrow$ (a_n) es convergente.

Punto límite

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Decimos que un número c es un ***punto límite*** de A si existe una sucesión $(a_n) \subset A$ tal que $a_n \longrightarrow c$.

Límite superior

Sea (a_n) una sucesión y $\mathcal{L} = \{\text{puntos límite de } (a_n)\}$.

1. si $\mathcal{L}$ está acotado superiormente, se llama ***límite superior de*** (a_n) a
$$\text{lím sup}\, a_n = \sup \mathcal{L}$$
2. si $\mathcal{L}$ no está acotado superiormente, se llama ***límite superior de*** (a_n) a
$$\text{lím sup}\, a_n = +\infty$$

Límite inferior

Sea (a_n) una sucesión y $\mathcal{L} = \{\text{puntos límite de } (a_n)\}$.

1. si $\mathcal{L}$ está acotado inferiormente, se llama ***límite inferior de*** (a_n) a
$$\text{lím inf}\, a_n = \text{ínf}\, \mathcal{L}$$
2. si $\mathcal{L}$ no está acotado inferiormente, se llama ***límite inferior de*** (a_n) a
$$\text{lím inf}\, a_n = -\infty$$