FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

COMPLEMENTOS DE ANÁLISIS

MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA MATEMÁTICA PRIMER CUATRIMESTRE 2013

PRÁCTICA 0

1. Resolver las siguientes desigualdades y representar el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ que las satisfacen en la recta.

   a) $x - 10 > 2 - 2x$

   b) $2x + 1 > 10 - 6x$

   c) $7x - 2 \leqslant 2x + 1$

   d) $-5 < x - 4 < 2 - x$

   e) $\dfrac{5+x}{5-x} \leqslant 2$

   f) $\dfrac{3x-5}{2x+4} > 1$

   g) $0 < \dfrac{2x-1}{x-1} < 1$

   h) $x(x-1) < 0$

   i) $2x^2 - 2 \geqslant x^2 - x$

2. Hallar el conjunto de números reales que satisfacen cada una de las condiciones siguientes y representar dicho conjunto sobre la recta

   a) $|2 - x| < 2$

   b) $|2x - 1| \leqslant 2$

   c) $|4x - 12| > 4$

   d) $|x - 1| < |x + 3|$

   e) $\dfrac{|x-1|}{x+2} \geqslant 4$

   f) $\dfrac{|x-1|}{-x} < 3$

   g) $|x+1|^2 = |x+1| + 2$

   h) $\dfrac{15-3x}{2-|x+3|} < 0$

3. Representar los siguientes conjuntos en la recta real:

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leqslant x^2\}$

   b) $B = \{x \in \mathbb{R} : |x+3| + |x-9| > 2\}$

   c) $C = \{x \in \mathbb{R} : ||x+2| - |x-1|| < 1\}$

4. Sea $a \geqslant 0$. Determinar para qué valores de b se verifican cada una de las siguientes condiciones:

   a) $|a+b| = |a| + |b|$

   b) $|a-b| < |a| + |b|$

   c) $||a| - |b|| = |a-b|$

5. Sean a y b números reales. Decidir para qué valores de a y de b son válidas cad una de las siguientes afirmaciones:

   a) $a < a^2$

   b) $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

   c) $a > 0 \Rightarrow ab \geqslant b$

   d) $a + b \geqslant \max\{a, b\}$

6. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que: $0 \leqslant x \leqslant y$. Probar que: $x \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2} \leqslant y$.

7. PARTE ENTERA

   Dado $a \in \mathbb{R}$ se define
$$[a] = \max\{m \in \mathbb{Z} \ / \ m \leqslant a\}$$

   Probar

   a) $[a] \leqslant a < [a] + 1$

   b) $[a] = a \quad \Longleftrightarrow \quad a \in \mathbb{Z}$

   c) Sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces
$$m \leqslant a < m+1 \quad \Longrightarrow \quad [a] = m$$

   d) Calcular: $[3,9]$, $[20,18742]$, $[0,39]$, $[-1]$, $[-1,3]$, $[-\pi]$

Apéndice: Definiciones y Resultados

Propiedades básicas de los números reales

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = a$
4. Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$
5. $ab = ba$
6. $a(bc) = (ab)c$
7. Existe $1 \in \mathbb{R}$ –$1 \neq 0$– tal que $a{,}1 = a$
8. Para cada $a \neq 0$ existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $aa^{-1} = 1$
9. $a(b + c) = ab + ac$
10. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, vale una y sólo una de las siguientes afirmaciones

    $$a = b \qquad , \qquad a < b \qquad , \qquad b < a$$

11. Si $a < b$ y $b < c$, $a < c$
12. Si $a < b$ y $c \in \mathbb{R}$, $a + c < b + c$
13. Si $a < b$ y $0 < c$, $ac < bc$

Módulo — Valor Absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del módulo

1. $|x| \geqslant 0$
2. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
3. $|x| \leqslant a \quad \Longleftrightarrow \quad -a \leqslant x \leqslant a$
4. $|xy| = |x||y|$
5. $|x+y| \leqslant |x| + |y|$
6. $|x-y| \geqslant ||x| - |y||$
7. $|x-a| = \begin{cases} x-a & \text{si } x \geqslant a \\ -x+a & \text{si } x < a \end{cases}$

Distancia

Dados $x, y \in \mathbb{R}$ se llama distancia entre los números x e y al número

$$d(x,y) = |x-y|$$

Raíz $n-$ésima

$\star$ Si n es par, la raíz $n-$ésima de un número *positivo* x es el ***único número positivo*** $\sqrt[n]{x}$ que satisface $(\sqrt[n]{x})^n = x$

$\star$ Si n es impar, la ráiz $n-$ésima de un número $x \in \mathbb{R}$ es el único número que satisface $(\sqrt[n]{x})^n = x$

Proposición *(Parte Entera)*

Dado $x \in \mathbb{R}$, existe un único $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m \leqslant x < m+1$$

Nota: este número m se llama ***parte entera de*** x y se lo denota $[x]$.