Práctica 8: Separabilidad, Conjuntos Perfectos

Separabilidad

Ejercicio 1. Probar que $\mathbb{R}^n$ (con la distancia euclídea) es separable.

Ejercicio 2. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ / \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Se define en c_0 la métrica

$$d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| \ / \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Probar que (c_0, d) es un espacio métrico separable.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ un subconjunto denso. Probar que si A es separable, entonces X es separable.

Ejercicio 4. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que una familia $\mathcal{A} = (U_j)_{j\in J}$ de abiertos de X es una *base de abiertos de* X si todo abierto de X se puede escribir como unión de miembros de $\mathcal{A}$. Probar que $\mathcal{A}$ es una base de abiertos de X si y sólo si verifica la siguiente condición: "Para todo abierto G de X y para todo $x \in G$ existe $j \in J$ tal que $x \in U_j \subseteq G$".

Ejercicio 5. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que son equivalentes:

i) X es separable

ii) X posee una base numerable de abiertos

iii) Todo cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento numerable.

Ejercicio 6. Probar que todo espacio métrico totalmente acotado es separable.

Ejercicio 7. Probar que todo subespacio de un espacio métrico separable es separable.

Ejercicio 8. Sea (X, d) un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de X no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. Deducir que el conjunto de puntos aislados de X es a lo sumo numerable. Comparar con el ejercicio 10 de la práctica 1.

Ejercicio 9. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞ definida por

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es separable si y sólo si (X, d) e (Y, d') son separables.

Ejercicio 10. ¿Es el espacio (ℓ_∞, d_∞) separable?

Ejercicio 11. Sean X, Y espacios métricos. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Probar que si X es separable, entonces Y es separable. ¿Se puede reemplazar la hipótesis de sobreyectividad por otra más débil manteniendo la conclusión?

Conjuntos Perfectos

Ejercicio 12. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor.

i) Probar que $\mathcal{C}$ es cerrado y acotado (luego compacto).

ii) Probar que $\mathcal{C}$ es perfecto (i.e. $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$).

iii) Probar que $\mathcal{C}$ tiene interior vacío.

iv) Probar que $x \in \mathcal{C}$ sii x admite un desarrollo en base 3 que usa solamente las cifras 0 y 2.

v) Probar que $\mathcal{C}$ tiene cardinal c.

Ejercicio 13. Sea X un espacio métrico completo. Probar que si $P \subseteq X$ es perfecto entonces es no numerable.

Ejercicio 14.

i) Sea X un espacio métrico, y sea S un subconjunto de X. Decimos que $x \in X$ es un *punto de condensación* de S si para todo $r > 0$, el conjunto $B(x,r) \cap S$ es no numerable.

   Supongamos que X es separable y $S \subseteq X$ es no numerable. Sea T el conjunto de puntos de condensación de S. Probar que:

   (a) T es no vacío.
   (b) Más aún, $S - T$ es a lo sumo numerable (y por lo tanto T es no numerable).
   (c) T es un conjunto cerrado.
   (d) T no posee puntos aislados.

ii) (Teorema de Cantor-Bendixson) Sean X un espacio métrico separable y $F \subseteq X$ un conjunto cerrado. Probar que F puede expresarse en la forma $F = A \cup B$, donde A es perfecto (posiblemente vacío) y B es a lo sumo numerable.