Práctica 7: Compacidad, Continuidad uniforme

Compacidad

Ejercicio 1.

i) Mostrar que el intervalo $(0,1] \subset \mathbb{R}$ no es compacto.

ii) Sea $S = (a,b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de $(\mathbb{Q}, d)$, donde d es la métrica usual de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Sea $E = \{e^{(n)} \in \ell_\infty \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, donde cada sucesión $e^{(n)} = (e_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ está definida por

$$e_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ 1 & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

Probar que E es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

Ejercicio 3. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ / \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Se define en c_0 la métrica

$$d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| \ / \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostrar que la bola cerrada $\overline{B}(x,1) = \{y \in c_0 \ / \ d(x,y) \leq 1\}$ no es compacta.

Ejercicio 4. Sea X un espacio métrico y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in X$. Probar que el conjunto $K = \{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\} \subset X$ es compacto.

Ejercicio 5. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que:

i) Si (X,d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.

ii) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de X es compacta.

iii) Un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$.

Ejercicio 6. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Se considera $(X \times Y, d_\infty)$, donde

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si (X,d) e (Y,d') son compactos.

Ejercicio 7. Sea X un espacio métrico compacto y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in X$. Probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq \varepsilon$ para todo $x \in X$.

Ejercicio 8. Sea (X,d) un espacio métrico.

i) Sean $F \subset X$ un cerrado y $x \in X - F$. Probar que no es cierto en general que exista un punto $y \in F$ tal que $d(x,y) = d(x,F)$. Es decir, la distancia entre un punto y un cerrado puede no realizarse.

ii) Sean $K \subset X$ un compacto y $x \in X - K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$. Es decir, la distancia entre un punto y un compacto siempre se realiza.

iii) Probar que si X tiene la propiedad de que toda bola cerrada es compacta (por ejemplo, si $X = \mathbb{R}^n$) entonces sí vale que la distancia entre un punto y un cerrado siempre se realiza.

iv) Sean F, $K \subset X$ dos subconjuntos disjuntos de X tales que F es cerrado y K es compacto. Probar que la distancia $d(F, K)$ entre F y K es positiva, pero puede no realizarse.

v) Sean $K_1, K_2 \subset X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$. Es decir, la distancia entre dos compactos siempre se realiza.

Ejercicio 9. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Se define

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X \ / \ K \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

i) Sea $\tilde{d}(A, B) = \sup\limits_{a \in A}\{d(a, B)\}$. Verificar que, en general, $\tilde{d}$ **no** es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

ii) Se define $d : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ como $d(A, B) = \text{máx}\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$. Probar que para todo $\varepsilon > 0$ vale

$$d(A, B) < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subset B(B, \varepsilon) \quad \text{y} \quad B \subset B(A, \varepsilon),$$

donde $B(C, \varepsilon) = \{x \in X \ / \ d(x, C) < \varepsilon\}$ para cada $C \subset X$.

iii) Probar que d es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

Ejercicio 10. Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i \in I}$ de un espacio métrico (X, d), un número $\varepsilon > 0$ se llama *número de Lebesgue* de $(U_i)_{i \in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

Ejercicio 11. (Teorema de Dini) Sea K un espacio métrico compacto y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K)$ una sucesión de funciones que converge puntualmente a $f \in C(K)$. Supongamos además que para cada $x \in K$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Probar que (f_n) converge uniformemente en K.

Ejercicio 12. Sea X un espacio métrico compacto, sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente a f si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ en X que converge a $x \in X$, la sucesión $(f_n(x_n))_{n \geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$ a $f(x)$.

Ejercicio 13. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ continua y biyectiva. Probar que si (X, d) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.

Ejercicio 14. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico (Y, d'), la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ definida por $\pi(x, y) = y$ es cerrada.

Ejercicio 15. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $(X \times Y, d_\infty)$, entonces f es continua. Comparar con el ejercicio 8 de la práctica 3.

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

i) Probar que f no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

ii) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.

iii) Mostrar que $f : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

Ejercicio 17. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua con la siguiente propiedad: para todo $n \in \mathbb{N}_0$, es $\int_a^b x^n f(x)dx = 0$. Probar que f es la función idénticamente nula.

Ejercicio 18. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones $X \to Y$ es *equicontinua* en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \implies \forall f \in \mathcal{F},\ d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Se dice que $\mathcal{F}$ es *equicontinua* en X si es equicontinua en x para todo $x \in X$. Por último, decimos que la familia $\mathcal{F}$ es *uniformemente equicontinua* en X si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \implies \forall f \in \mathcal{F},\ d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Sea X un espacio métrico compacto.

i) Si $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua de funciones $X \to Y$, entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua.

ii) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas $X \to Y$ que converge uniformemente en X, entonces $\{f_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ es una familia uniformemente equicontinua.

iii) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones $X \to Y$ uniformemente equicontinua que converge puntualmente a $f : X \to Y$, entonces la convergencia es uniforme.

Ejercicio 19. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ integrables y uniformemente acotadas y para cada $n \geq 1$ sea $F_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(\xi)\, d\xi$$

para cada $x \in [a, b]$. Entonces la sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ posee una subsucesión que converge uniformemente sobre $[a, b]$.

Continuidad Uniforme

Ejercicio 20. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función que satisface:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c\ d(x_1, x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$, donde $c \geq 0$. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 21.

i) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ sucesiones y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

a) $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ para $n \to \infty$ y

b) $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$,

entonces f no es uniformemente continua en A.

ii) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ¿Y en $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$?

iii) Verificar que la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

Ejercicio 22.

i) Sea $f : \mathbb{R}_{\geq a} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a, b]$ y también en $[b, +\infty)$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq a}$.

ii) Deducir que $\sqrt{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

iii) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 23. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

Ejercicio 24.

i) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

ii) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

Ejercicio 25. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subset X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.