Práctica 6: Completitud, Baire

Completitud

Ejercicio 1. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Probar que:

i) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

ii) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

iii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?

iv) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces es acotada.

v) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Ejercicio 2. Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X, entonces X es completo.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico.

i) Probar que todo subespacio completo de (X, d) es un subconjunto cerrado de X.

ii) Probar que si X es completo, entonces todo subconjunto $F \subseteq X$ cerrado, es un subespacio completo de X.

Ejercicio 4. (Teorema de Cantor) Probar que un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si toda familia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X cerrados, no vacíos tales que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{diam}(F_n) \longrightarrow 0$ tiene un único punto en la intersección.

Ejercicio 5. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es completo si y sólo si (X, d) e (Y, d') son completos.

Ejercicio 6. Sean X e Y espacios métricos, Y completo. Sea $D \subset X$ denso y sea $f : D \longrightarrow Y$ una función uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X, es decir, existe una única función $F : X \longrightarrow Y$ continua tal que $F|_D = f$. (Más aún, F es uniformemente continua).

Ejercicio 7.

i) Sea X un espacio métrico y sea $B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \;/\; f \text{ es acotada } \}$. Probar que $(B(X), d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.

ii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Probar que $(C[a, b], d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

iii) Probar que $C_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid a_n \to 0\}$ es un espacio métrico completo con la distancia $d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{x\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$.

Ejercicio 8. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{D} \subset X$ un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ converge en X. Probar que X es completo.

Baire

Ejercicio 9. Probar que $\mathbb{R}^n$ no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

Ejercicio 10. Sean (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X. Probar que D no es un G_δ.

Ejercicio 11. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.
Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n = \Big\{x \in \mathbb{R} \ / \ \exists\, U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \operatorname{diam}(f(U)) < \frac{1}{n}\Big\}.$$

Ejercicio 12.
Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0, 1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{f \in C[0, 1] \ / \ f \text{ es monótona en } I_n\}.$$

i) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado y de interior vacío en $(C[0, 1], d_\infty)$.

ii) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.

Ejercicio 13. Sea (X, d) espacio métrico. Se dice que un conjunto $A \subset X$ es *nunca denso* si $\overline{A}^\circ = \emptyset$.

i) Probar que si A es nunca denso, entonces $X - A$ es denso. ¿Vale el recíproco?

ii) Probar que si A es abierto y denso, entonces $X - A$ es nunca denso.

Ejercicio 14. Sea (X, d) espacio métrico y $A \subset X$. Probar que son equivalentes:

(1) A es nunca denso;

(2) toda bola B abierta contiene otra $B_1 \subset B$ abierta tal que $B_1 \cap A = \emptyset$;

(3) A no es denso en ninguna bola abierta.

Ejercicio 15. Sea $Lip[a, b] = \{f \in C[a, b] / \ \exists k > 0,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|\}$. Probar que $Lip[a, b]^\circ = \emptyset$ en $C[a, b]$.