PRÁCTICA 5: CONVERGENCIA UNIFORME

Ejercicio 1.

i) Hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida sobre $A \subseteq \mathbb{R}$.

(a) $f_n(x) = x^n, \quad A = (-1, 1]$.

(b) $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}, \quad A = (1, +\infty)$.

(c) $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n, \quad A = [0, 1]$.

ii) Para a) demostrar que la convergencia es uniforme en $A = (0, 1/2]$, idem en b) con $A = [2, 5]$. ¿Es uniforme la convergencia de c) en A o en algún sub-intervalo de A?

Ejercicio 2. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:

i) $f_n(x) = \dfrac{sen(nx)}{n}, \; x \in \mathbb{R}$.

ii) $f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{n}\right), \; x \in \mathbb{R}$.

iii) $f_n(z) = \dfrac{n}{n+1}z, \; z \in \mathbb{C}$.

iv) $f_n(z) = nz^2, \; z \in \mathbb{C}$.

v) $f_n(z) = z^n$, definidas en $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

Ejercicio 3. Sea X un conjunto y sea $B(X)$ el conjunto de las funciones $X \to \mathbb{C}$ que son acotadas. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $B(X)$.

i) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a una función $f : X \to \mathbb{C}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

ii) Probar que si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f : X \to \mathbb{C}$, entonces $f \in B(X)$.

iii) Probar que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a una función acotada $f : X \to \mathbb{C}$ si y sólo si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en $(B(X), d_\infty)$.

iv) Probar que si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en X, entonces existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es *uniformemente acotada*.

Ejercicio 4. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{(x^2+1)x}{1+(n+1)^2x^2}$, probar que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente pero no uniformemente a una función continua.

Ejercicio 5. Sea X un conjunto. Si $(f_n) : X \to \mathbb{R}$ y $(g_n) : X \to \mathbb{R}$ convergen uniformemente en $E \subset X$, probar que $(f_n + g_n)$ converge uniformemente en E. Si además (f_n) y (g_n) son uniformemente acotadas, entonces $(f_n g_n)$ es uniformemente convergente. Mostrar con un ejemplo que esta última restricción es necesaria.

Ejercicio 6.

i) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cada una de ellas derivable, que converge a una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y tal que f_n' son continuas y convergen uniformemente a una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Probar que f es derivable y que $f' = g$. (Sugerencia: usar el teorema fundamental del cálculo).

ii) Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{sen(nx)}{\sqrt{n}}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, pero sin embargo la sucesión de sus derivadas no converge en ningún punto.

Ejercicio 7. Hallar (y justificar) los conjuntos en $\mathbb{R}$ de convergencia puntual, uniforme y no convergencia de las siguientes series:
$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \quad ; \qquad ii) \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n \quad ; \qquad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ; \qquad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$
¿Qué ocurre con la serie que se obtiene derivando término a término?

Ejercicio 8. Consideramos la función dada por la serie:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Probar que la serie converge uniformemente en cada intervalo $(1 + \varepsilon, \infty)$ hacia una función continua, y que es posible derivarla término a término en dicho intervalo.

Ejercicio 9. Sean f_n continuas en $[0, 1]$ tales que $f_n \rightrightarrows f$. Decidir si vale la siguiente afirmación:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

Ejercicio 10. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones $X \to Y$ es *equicontinua* en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \implies \forall f \in \mathcal{F},\ d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Se dice que $\mathcal{F}$ es *equicontinua* en X si es equicontinua en x para todo $x \in X$.

i) Toda familia finita de funciones de X en Y continuas en $x_0 \in X$ es equicontinua en x_0.

ii) Sea $B(X, Y)$ el conjunto de las funciones acotadas de X en Y. Si $\mathcal{F} \subseteq B(X, Y)$ es una familia equicontinua, entonces $\overline{\mathcal{F}}$ también es equicontinua.