Práctica 10: Espacios de Hilbert

Ejercicio 1. Probar que son espacios de Hilbert:

i) $\mathbb{C}^n$, con producto interno $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$, sobre $k = \mathbb{C}$.

ii) ℓ^2, con producto interno $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$, sobre $k = \mathbb{R}$.

Ejercicio 2. (Fórmulas de polarización) Sea E un espacio vectorial con producto interno. Probar que si E es real, entonces para todos $x, y \in E$ vale la fórmula

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big\};$$

y si E es complejo, entonces

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\Big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\Big)\Big\}.$$

Ejercicio 3. Sea E un espacio normado, y sean $x, y \in E$ tales que $\|x\| = \|y\| = r$, $x \neq y$. Probar que si la norma de E proviene de un producto interno, entonces para todo $t \in (0,1)$ se tiene $\|tx + (1-t)y\| < r$.

Ejercicio 4.

i) Sea E un espacio normado. Probar que si la norma de E proviene de un producto interno, entonces se verifica la identidad del paralelogramo, esto es:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \qquad \forall x, y \in E.$$

ii) Probar que $(\ell^p, \|\ \|_p)$ con $p \neq 2$ y $(C[0,1], \|\ \|_\infty)$ no son espacios de Hilbert.

Ejercicio 5. Sean H un espacio de Hilbert y $S \subseteq H$ un subespacio.

i) Probar que $S^\perp = \overline{S}^\perp$.

ii) Probar que si S es cerrado, entonces $\left(S^\perp\right)^\perp = S$.

iii) Probar que en general $\left(S^\perp\right)^\perp = \overline{S}$.

Ejercicio 6. Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{e_i\}_{i\in I}$ un conjunto ortonormal. Son equivalentes:

1. $\{e_i\}_{i\in I}$ es ortonormal maximal.
2. Si $x \in H$, $x \perp e_i \;\; \forall i$, entonces $x = 0$.
3. El subespacio generado por los e_i es denso en H.

En caso de que $\{e_i\}_{i\in I}$ cumpla alguna de las anteriores (y por lo tanto todas), diremos que $\{e_i\}_{i\in I}$ es una *base* de H. (No confundir con las bases de H como espacio vectorial, a las que llamaremos «bases algebraicas» o «bases de Hamel» para diferenciar.)

Ejercicio 7. (Ortogonalización de Gram-Schmidt) Sea H un espacio de Hilbert sobre $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y supongamos que $\{b_n\}_n$ es un subconjunto linealmente independiente de H que genera un subespacio denso en H.

i) Definamos $e_1 := \frac{b_1}{\|b_1\|}$ y, una vez definido e_n,

$$e_{n+1} := \frac{b_{n+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle b_{n+1}, e_k \rangle \, e_k}{\|b_{n+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle b_{n+1}, e_k \rangle \, e_k\|}$$

Probar que $\{e_n\}_n$ es una base de H.

ii) Sea $\{f_n\}_n$ un conjunto ortonormal tal que para todo n, f_n pertenece al subespacio generado por $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Probar que existen escalares $\alpha_n \in k$, con $|\alpha_n| = 1$ para todo n, tales que $f_n = \alpha_n e_n$ para todo n.

Ejercicio 8. (Desigualdad de Bessel) Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto ortonormal. Probar que para todos $x \in H$ y $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{N} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$. Deducir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$ converge y su suma es menor o igual que $\|x\|^2$.

Ejercicio 9. Sea H un espacio de Hilbert. Si $\{e_n\}_n$ es una base de H, entonces $\forall x \in H$ valen:

i) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \, e_n$

ii) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$

iii) Si $y \in H$, $\quad \langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \, \overline{\langle y, e_n \rangle}$

Ejercicio 10. Sean H y K espacios de Hilbert. En $H \times K$ definimos

$$\langle (h_1, k_1), (h_2, k_2) \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle_H + \langle k_1, k_2 \rangle_K$$

Probar que $(H \times K, \langle \;,\; \rangle)$ es un espacio de Hilbert, y que $H \times \{0\}$ y $\{0\} \times K$ son cerrados y ortogonales en $H \times K$.

Ejercicio 11.

i) Sean H un espacio de Hilbert, $D \subset H$ un subconjunto. Probar que el subespacio generado por D es denso en H si y sólo si se verifica

$$\langle x, y \rangle = 0 \;\; \forall y \in D \Rightarrow x = 0$$

ii) Sea $S = \left\{ x \in \ell^2 : \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \right\}$. Probar que S es denso en ℓ^2.

Ejercicio 12. Sean S y T subespacios cerrados y ortogonales de un espacio de Hilbert H. Probar que $S \oplus T$ es cerrado.

Ejercicio 13. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortogonal en un espacio de Hilbert H, son equivalentes:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ converge.