

## PRÁCTICA 9: ESPACIOS NORMADOS

**Ejercicio 1.** Probar que cada uno de los siguientes es un espacio normado sobre  $\mathbb{R}$ , y decidir si es un espacio de Banach.

- i)  $\ell^1 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} / \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ , con  $\|(x_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ .
- ii)  $\ell^1$  con  $\|(x_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ .
- iii)  $C[a, b]$  con  $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .
- iv)  $C^1[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es de clase } C^1\}$  con  $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado (sobre  $k = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ). Probar que se verifican:

- i) Las operaciones  $+: E \times E \rightarrow E$  y  $\cdot: k \times E \rightarrow E$  son funciones continuas.
- ii)  $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$  (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).
- iii)  $\text{diam}(B(x, r)) = 2r$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado y sea  $C \subset E$ . Decimos que  $C$  es *convexo* si para todos  $x, y \in C$  y  $t \in [0, 1]$  se tiene que  $tx + (1-t)y \in C$ .

- i) Probar que la bola abierta  $B(x, r)$  es convexa.
- ii) Probar que si  $C$  es convexo, entonces  $C^\circ$  y  $\overline{C}$  también lo son.
- iii) Probar que si  $(C_i)_{i \in I}$  es una familia de subconjuntos convexos de  $E$ , entonces  $\bigcap_{i \in I} C_i$  es convexo. Deducir que dado un subconjunto  $A \subset E$ , existe un único conjunto convexo minimal (respecto de la inclusión) que lo contiene. Este conjunto se llama la *cápsula convexa* de  $A$ , y lo notamos  $\text{Conv}(A)$ .
- iv) Probar que si  $A = \{x_1, \dots, x_n\}$  es un subconjunto finito de  $E$ , entonces  $\text{Conv}(A) = \{\sum_{i=1}^n a_i x_i / a_i \geq 0 \text{ para todo } i, \sum_{i=1}^n a_i = 1\}$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $S \subset E$  un subespacio (vectorial). Probar que:

- i)  $\overline{S}$  también es un subespacio.
- ii) Si  $S \neq E$ , entonces  $S^\circ = \emptyset$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $E$ . Probar que si  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$  converge, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  converge.

**Ejercicio 6.** Dado un  $k$ -espacio vectorial  $E$ , un subespacio (vectorial)  $H \subset E$  se dice un *hiperplano* si existe  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ , tal que  $H \oplus \langle x \rangle = E$ .

- i) Probar que si  $H$  es un hiperplano, entonces para todo  $y \in E \setminus H$  se tiene que  $H \oplus \langle y \rangle = E$ .
- ii) Probar que  $H$  es un hiperplano si y sólo si existe  $\phi : E \rightarrow k$  lineal,  $\phi \neq 0$ , tal que  $H = \text{Nu}(\phi)$ .

iii) Probar que si  $E$  es un espacio normado y  $H$  es un hiperplano, entonces  $H$  es o bien cerrado o bien denso en  $E$ .

**Ejercicio 7.** Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperplanos.

i)  $c = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\} \subset \ell_\infty$ .

ii)  $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \rightarrow 0\} \subset c$ .

iii)  $\{x \in \ell^1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset \ell^1$ .

**Ejercicio 8.** Sean  $E$  y  $F$  espacios normados, y sea  $T : E \rightarrow F$  un operador lineal. Probar que son equivalentes:

- (1)  $T$  es continuo en 0;
- (2)  $\exists x_0 \in E$  tal que  $T$  es continuo en  $x_0$ ;
- (3)  $T$  es continuo;
- (4)  $T$  es uniformemente continuo;
- (5)  $\exists M > 0$  tal que  $\|Tx\| \leq M\|x\|$  para todo  $x \in E$  ( $T$  es acotado);
- (6)  $\forall A \subset E$  acotado,  $T(A)$  es acotado.

**Ejercicio 9.** Sean  $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$  espacios normados. Consideramos  $L(E, F) := \{T : E \rightarrow F / T \text{ es lineal y continua}\}$ , y para cada  $T \in L(E, F)$  sea

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

Probar que:

- i)  $(L(E, F), \|\cdot\|)$  es un espacio normado.
- ii) Si  $F$  es de Banach entonces  $L(E, F)$  también lo es.

**Ejercicio 10.** Sean  $E$  y  $F$  espacios normados y sea  $T : E \rightarrow F$  un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M > 0 / \|Tx\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x\}.$$

**Ejercicio 11.** Sea  $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y sea  $K : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  dada por

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y)dy.$$

Probar que  $K$  es lineal y continua. Encontrar una cota para su norma.

**Ejercicio 12.** En  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n \geq 1} / \exists n_0, a_n = 0 \forall n \geq n_0\}$  ponemos la norma infinito. Probar que la función  $f : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f((a_n)_{n \geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n,$$

está bien definida y es lineal pero no es continua.

**Ejercicio 13.** Sean  $S, T : \ell^1 \rightarrow \ell^1$ , definidos por:

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

Probar que  $S, T \in L(\ell^1)$  y calcular sus normas.

**Ejercicio 14.** Sea  $T : c \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $T(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Probar que  $T$  es lineal y continuo y hallar  $\|T\|$ . (Recordar:  $c$  es el conjunto de las sucesiones en  $\mathbb{R}$  convergentes).

**Ejercicio 15.** Sea  $\phi \in C[0, 1]$  y sea  $T_\phi : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$T_\phi f = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx.$$

Probar que  $T_\phi$  es un funcional lineal continuo y que  $\|T_\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)|dx$ .

**Ejercicio 16.** Sea  $E$  un espacio normado sobre  $k$  ( $k = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ) y sea  $\phi : E \rightarrow k$  un funcional lineal. Probar que  $\phi$  es continuo si y sólo si  $\text{Nu}(\phi)$  es cerrado.

**Ejercicio 17.** Sea  $E$  un espacio normado de dimensión infinita. Asumiendo la existencia de una base de  $E$  como espacio vectorial, definir una función lineal  $\phi : E \rightarrow k$  que no sea continua. Deducir que todo espacio normado de dimensión infinita contiene un subespacio (vectorial) propio denso.

**Ejercicio 18.** Sea  $E$  un espacio normado de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{R}$  y sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$  un isomorfismo algebraico (es decir, una transformación lineal biyectiva). Consideramos en  $\mathbb{R}^n$  la norma  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

- i) Probar que  $K = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_\infty = 1\}$  es compacto en  $\mathbb{R}^n$ .
- ii) Probar que existen  $c_1, c_2 > 0$  tales que  $c_1\|x\|_\infty \leq \|f(x)\|_E \leq c_2\|x\|_\infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- iii) Probar que si  $N_1, N_2$  son dos normas en  $E$ , entonces son equivalentes: esto es, existen constantes  $a, b > 0$  tales que  $a \cdot N_1(x) \leq N_2(x) \leq b \cdot N_1(x)$  para todo  $x \in E$ .
- iv) Probar que cualquier norma que se defina sobre  $E$  lo convierte en un espacio de Banach.

**Ejercicio 19.** Sea  $E$  un espacio normado y  $S \subset E$  un subespacio vectorial de dimensión finita. Probar que  $S$  es cerrado en  $E$ .

**Ejercicio 20.** Sea  $E$  un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que no puede tener una base algebraica numerable.

*Sugerencia:* si la tuviera se escribiría como unión numerable de subespacios de dimensión finita. Usar el teorema de Baire.