1	2	3	4	5	Calificación

Nombre y apellido: ....

N° de libreta: ....

Cálculo Avanzado

Primer parcial - 17/05/13

1) Decimos que una sucesión de números racionales (a_n) es eventualmente aritmética si existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $d \in \mathbb{Q}$ tales que $a_{n+1} - a_n = d$ para todo $n \geq n_0$. Calcular el cardinal del conjunto $\{(a_n) \subseteq \mathbb{Q} : (a_n) \text{ es eventualmente aritmética}\}$.

2) Consideremos el conjunto $X = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(1) = 0\}$ y la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida como

$$d(f,g) = \text{ínf}\{x \in [0,1] : f(y) = g(y) \text{ para todo } y \in [x,1]\}.$$

   a) Probar que (X, d) es un espacio métrico.

   b) Si d_∞ es la métrica dada por $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$, probar que ninguna de las funciones identidad $id_1 : (X,d) \to (X, d_\infty)$ e $id_2 : (X, d_\infty) \to (X, d)$ es continua.

3) Sean X un espacio métrico y $x \in X$. Probar que la componente conexa de x está contenida en la intersección de todos los subconjuntos de X que contienen a x y son a la vez abiertos y cerrados. ¿Vale la igualdad?

4) Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(1) = 0$. Consideremos la sucesión de funciones (f_n) definida por $f_n(x) = x^n g(x)$. Probar que (f_n) converge uniformemente en $[0,1]$.

5) Sean d y d' métricas en un conjunto X no vacío. Supongamos que existen $c_1, c_2 > 0$ tales que $c_1 d(x,y) \leq d'(x,y) \leq c_2 d(x,y)$ para todos $x, y \in X$. Probar que (X,d) es completo si y sólo si (X,d') es completo. ¿Se puede concluir lo mismo si solamente pedimos que las métricas d y d' sean topológicamente equivalentes?

Justifique todas las respuestas