Práctica 7 - Medidas abstractas

Ejercicio 1. Probar que las siguientes ternas $(X, \mathcal{A}, \mu)$ constituyen espacios de medida. En cada caso encontrar los conjuntos de medida nula y caracterizar $\int_X f(x)d\mu(x)$.

(a) **Medida de contar.** Dado un conjunto X tomamos $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ y para cada $E \in \mathcal{A}$ definimos

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E & \text{si } E \text{ es finito} \\ \\ +\infty & \text{si } E \text{ es infinito.} \end{cases}$$

(b) **Medida de contar pesada.** Dada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de números reales no negativos (denominados *pesos*) tomamos $X = \mathbb{N}$ con $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ y definimos para cada $E \in \mathcal{A}$

$$\mu(E) = \sum_{n\in E} a_n.$$

(c) **Medida de Dirac concentrada en x_0.** Dada un conjunto X no vacío y $x_0 \in X$ tomamos $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ y para cada $E \in \mathcal{A}$ definimos

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in E \\ 0 & \text{si } x_0 \notin E. \end{cases}$$

La medida μ se denomina la medida delta de Dirac concentrada en x_o y se nota δ_{x_0}.

(d) **Medida de Lebesgue pesada.** Tomamos $X = \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{A} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ y dada una función medible $w : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ (denominada *peso*) definimos para cada $E \in \mathcal{A}$

$$\mu(E) = \int_E w(x)dx.$$

Ejercicio 2. Probar que toda medida μ definida sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ es una medida de contar pesada para alguna elección adecuada de pesos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejercicio 3. Sea $(a_{k,j})_{k,j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ una sucesión indexada en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $(a_{k,j})_{j\in\mathbb{N}}$ es creciente y converge a un cierto número $a_k \in [0, +\infty)$. Probar que

$$\lim_{j\to+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,j} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Ejercicio 4. Un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se dice de *medida completa* si

$$A \subseteq Z \in \mathcal{A} \text{ con } \mu(Z) = 0 \Longrightarrow A \in \mathcal{A} \text{ y } \mu(A) = 0.$$

Probar que si (X, Σ, μ)es un espacio de medida entonces valen las siguientes afirmaciones:

(a) Si $Z_1 \in \mathcal{A},\ Z_1 \Delta Z_2 \in \mathcal{A}$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$ entonces $Z_2 \in \mathcal{A}$.

(b) Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{A}$-medible y $f = g$ en casi todo punto entonces g es $\mathcal{A}$-medible.

Ejercicio 5. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una aplicación tal que

(i) $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

(ii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ y $A_n \searrow \emptyset \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$.

Probar que μ es una medida.

Ejercicio 6. Sean $(X, \mathcal{A})$ y (Y, Σ) espacios medibles y μ una medida finita sobre $(X, \mathcal{A})$. Dada $F : X \to Y$ una función $(\mathcal{A}, \mathcal{F})$-medible definimos $\mu_F : \Sigma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ para cada $E \in \Sigma$ por la fórmula

$$\mu_F(E) = \mu(F^{-1}(E)).$$

Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) μ_F es una medida finita sobre (Y, Σ).

(b) Para toda función Σ-medible $f : Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ vale la igualdad

$$\int_Y f(y) d\mu_F(y) = \int_X f \circ F(x) d\mu(x).$$

(c) Una función Σ-medible $f : Y \to \mathbb{R}$ es μ_F-integrable si y sólo si $f \circ F$ es μ-integrable y en tal caso vale la igualdad

$$\int_Y f(y) d\mu_F(y) = \int_X f \circ F(x) d\mu(x).$$

Ejercicio 7. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y no nula. Sea $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que existe $S \subseteq \mathbb{C}$ cerrado con la propiedad de que para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) > 0$ se tiene

$$\left[\frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x) d\mu(x) \right] \in S.$$

Probar que $f(x) \in S$ para casi todo x.

Ejercicio 8. Sea $(X, \mathcal{A}, \nu)$ un espacio de medida con signo y sean A un conjunto positivo para ν y B un conjunto negativo para ν tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Dado $E \in \mathcal{A}$ demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \mathcal{A}\}$,

(b) $\nu^-(E) = -\nu(E \cap B) = \inf\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \mathcal{A}\}$.

Ejercicio 9. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, f una función μ-integrable y ν la medida sobre $(X, \mathcal{A})$ definida para cada $E \in \mathcal{A}$ por la fórmula

$$\nu(E) = \int_E f(x) d\mu(x).$$

Dado $E \in \mathcal{A}$ demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $\nu^+(E) = \int_E f^+(x) d\mu(x)$

(b) $\nu^-(E) = \int_E f^-(x) d\mu(x)$.

Ejercicio 10. Sean λ y μ medidas sobre $(X, \mathcal{A})$ con $\lambda(X) < +\infty$.

(a) Probar que si $\lambda \ll \mu$ entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $E \in \mathcal{A}$

$$\mu(E) < \delta \implies \lambda(E) < \varepsilon.$$

(b) Mostrar que sin la hipótesis $\lambda(X) < \infty$ la afirmación en (a) puede ser falsa.

Ejercicio 11. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita, $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X.

(a) Probar que si definimos la aplicación $\mu_f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ para cada $B \in \mathcal{F}$ por la fórmula

$$\mu_f(B) = \int_B f(x) d\mu(x)$$

entonces μ_f es una medida con signo sobre el espacio $(X, \mathcal{F})$ que satisface $\mu_f \ll \mu$. Deducir que existe una función $g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que para todo $B \in \mathcal{F}$

$$\int_B f(x) d\mu(x) = \int_B g(x) d\mu(x).$$

(b) Determinar la función g del inciso anterior si $\mathcal{F} = \{\emptyset, B, B^c, X\}$ para algún $B \in \mathcal{A}$.

Ejercicio 12. Sean X un conjunto y $(A_i)_{i=1,\ldots,N}$ una partición de X. Sea $\mathcal{A} = \sigma(A_1, \ldots, A_N)$, la σ-álgebra generada por $\{A_1, \ldots, A_N\}$.

(a) Probar que $B \in \mathcal{A}$ si y sólo si existen $i_1, \ldots, i_k \subseteq \{1, \ldots, N\}$ tales que $B = \bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}$.

(b) Caracterizar las funciones $\mathcal{A}$-medibles.

Ejercicio 13. Decidir si $\lambda \ll \mu$ en cada uno de los siguientes casos y hallar la derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\lambda}{d\mu}$ cuando corresponda.

(a) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda = \delta_0$ y $\mu = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

(b) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $\mu =$ medida de contar.
¿Contradicen sus conclusiones el Teorema de Radon-Nikodym?

(c) $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\lambda =$ medida de contar y $\mu =$ medida de contar con pesos $a_n = 2^{-n}$.

Ejercicio 14. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y ν una medida con signo sobre $(X, \mathcal{A})$ tal que $\nu \ll \mu$.

(a) Probar que existe una función $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que para toda $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \nu)$

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \int_X f(x) g(x) d\mu(x).$$

(b) Probar que $\{x \in X : g(x) \geq 0\}$ y $\{x \in X : g(x) < 0\}$ son respectivamente un conjunto positivo y uno negativo para ν.

Ejercicio 15. Descomposición polar de una medida compleja.
Sean $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ una medida compleja y $|\lambda|$ su variación.

(a) Probar que existe una función medible $\rho : X \to \mathbb{C}$ tal que para todo $E \in \mathcal{A}$

$$\lambda(E) = \int_E \rho(x) d|\lambda|(x).$$

(b) Mostrar que $|\rho| \equiv 1$ en casi todo punto.

(c) Concluir que para toda $f \in L^1(X, \mathcal{A}, |\lambda|)$ vale la desigualdad

$$\left| \int_X f(x) d\lambda(x) \right| \leq \int_X |f(x)| \, d \, |\lambda| \, (x).$$

Ejercicio 16. Dada μ una medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}$ definimos $F_\mu : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ por la fórmula

$$F(x) = \mu((-\infty, x]).$$

(a) Probar que F es monótona creciente, continua a derecha, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \mu(\mathbb{R})$ y $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

(b) Probar que μ es absolutamente continua respecto de $\mathcal{L}$ si y sólo si F es una función absolutamente continua. Mostrar además que en tal caso se tiene

$$\frac{d\mu}{d\mathcal{L}} = f'.$$

(c) Probar que μ es singular respecto de $\mathcal{L}$ si y sólo si $F' = 0$ c.t.p. con respecto a $\mathcal{L}$. *Sugerencia.* Considerar un argumento similiar al usado para probar que las funciones monótonas son derivables en casi todo punto.