Nombre y apellido .... Número de libreta ....

1	2	3	4	5	Nota

Una condición suficiente para aprobar el examen es resolver correctamente al menos tres ejercicios completos. Justificar todas sus respuestas y entregar cada ejercicio en hojas separadas.

1. *a*) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz. Probar que $f(E)$ es medible si $E \subseteq U$ es medible.
   b) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^m$ localmente Lipschitz con $n < m$. Probar que $f(U)$ tiene medida nula.
   c) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos tales que existe $f : U \to V$ difeomorfismo de clase C^1. Probar que $n = m$.

2. Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre el intervalo $[0, 1]$ y finitas para casi todo $x \in [0, 1]$. Probar que existe una sucesión $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números reales positivos tales que
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{f_k(x)}{c_k} = 0$$
para casi todo $x \in [0, 1]$.

3. **Definición**. Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones medibles definidas sobre un conjunto medible $E \subseteq \mathbb{R}^d$ de medida finita se dice *uniformemente integrable sobre* E si
$$\lim_{k\to+\infty} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\int_{\{x\in E:|f_n(x)|>k\}} |f_n(x)|dx \right] \right) = 0.$$
   a) Probar que una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones medibles es uniformemente integrable sobre un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ de medida finita si y sólo si se verifican las siguientes condiciones simultáneamente:
      i. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E |f_n(x)|dx < +\infty$
      ii. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
$$B \subseteq E\, ,\ |B| < \delta \Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\int_B |f_n(x)|dx \right] < \varepsilon.$$
   b) Verificar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles tales que existe g integrable que verifica $|f_n| \le g$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.
   c) Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles que converge en medida a una función f. Probar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable sobre $E \subseteq \mathbb{R}^d$ de medida finita si y sólo si f es integrable sobre E y además se tiene
$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|dx = 0.$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable tal que
$$\int_I f(x)\, dx = 0$$
para todo $I \subseteq \mathbb{R}^n$ intervalo. Probar que f es nula en casi todo punto.

5. Probar que para todo par de conjuntos $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^m$ se tiene
$$|A \times B|_e = |A|_e|B|_e.$$
Concluir que si $|A \times B|_e > 0$ entonces $A \times B$ es medible si y sólo si A y B lo son.