

---

# ANÁLISIS MATEMÁTICO I (LIC. EN CS. BIOLÓGICAS)

Primer cuatrimestre 2013

## Práctica 4: Derivadas

---

**Notaciones:** Dada una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , un punto  $a \in \mathbb{R}$  y un número  $\Delta x \in \mathbb{R}$  que llamaremos incremento en  $x$ , se define el incremento en  $y$  por  $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ . La derivada de  $f$  respecto de  $x$  se notará indistintamente por  $f'$ ,  $D_x f$  o  $\frac{df}{dx}$ . Observar que se tiene entonces que  $f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , en el caso en que este límite exista.

**Ejercicio 1.** Sean  $f(x) = x^2 - 4x + 7$  y  $a = 3$ .

- Para  $\Delta x = 1, \frac{1}{2}, -1$ , calcular la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos  $(a, f(a))$  y  $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ . Graficar la función y las tres rectas secantes en un mismo gráfico.
- Dar una expresión (en función de  $h$ ) de la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos  $(a, f(a))$  y  $(a + h, f(a + h))$  (donde  $h \neq 0$ ).
- Calcular la pendiente de la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  como límite de pendiente de rectas secantes.
- Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$ .
- Repetir los items anteriores para  $f(x) = 2 - x^3$  y  $a = 1$ .

**Ejercicio 2.** En una experiencia cuantitativa, la medición  $f(t)$  realizada después de  $t$  horas está expresada por  $y = f(t) = t^2 + 5t + 100$ , donde  $0 < t < 24$ . Si evaluamos esta magnitud cerca de  $t_1 = 3$  para  $\Delta t \neq 0$ , determine  $\Delta y$  y el cociente incremental  $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ . Luego calcule la velocidad instantánea de crecimiento de  $y$  en  $t_1 = 3$ .

**Ejercicio 3.** En cierta reacción química la cantidad de moles de moléculas de cierto compuesto (en función del tiempo) está dada por  $y = g(t) = -t^2 + 10t - 3$ , donde  $t$  es el tiempo transcurrido desde que se inició la reacción y  $0 < t < 9$ . Encuentre la velocidad instantánea de cambio de  $y$  respecto de  $t$  en  $t_0 = 3$ .

**Ejercicio 4.** Para cada una de las siguientes funciones, calcule (si existe) la derivada en los puntos indicados usando la definición.

(a)  $f(x) = x^2 + 1$ , en  $x = 1$  y  $x = -2$ .

(b)  $g(x) = x^3 + 2$ , en  $x = 1$  y  $x = -2$ .

(c)  $h(x) = \sqrt{2x - 1}$ , en  $x = 5$  y  $x = \frac{1}{2}$

**Ejercicio 5.**

(a) Sea  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Determine  $f'(a)$  para  $a \neq 0$ .

(b) Sea  $g(x) = e^{-x}$ . Calcule  $g(0) + g'(0)$ .

(c) Sean  $h(x) = 3 - x$  y  $m(x) = 1 - \sin \frac{\pi x}{2}$ . Calcule  $\frac{m'(1)}{h'(1)}$ .

**Ejercicio 6.** Calcule, usando la definición, la derivada de las siguientes funciones.

(a)  $f(x) = x^2 + 1$

(f)  $f(x) = \sqrt{x}$

(b)  $f(x) = x^3$

(g)  $f(x) = \operatorname{sen} x$

(c)  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x - 2$

(h)  $f(x) = \operatorname{cos} x$

(d)  $f(x) = \frac{3}{x+4}$

(i)  $f(x) = e^x$

(e)  $f(x) = \frac{2}{x^2}$

(j)  $f(x) = \ln x$

**Ejercicio 7.**

(a) Dada la función  $f(x) = |x| + x$ , calcular  $f'(1)$  y  $f'(-2)$ . ¿Existe  $f'(0)$ ?

(b) Dada la función  $g(x) = x \cdot |x|$ , calcular  $g'(1)$  y  $g'(-2)$ . ¿Existe  $g'(0)$ ?

(c) Determinar  $g'(x)$ .

**Ejercicio 8.** Dadas las siguientes funciones con dominio y codominio  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = |x| \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que las tres funciones son continuas en  $x = 0$ .

(b) Realice los gráficos de estas funciones.

(c) Demuestre que  $f$  y  $g$  no son derivables en  $x = 0$ .

(d) Estudiar la derivabilidad de  $h(x)$  en  $x = 0$ .

**Ejercicio 9.** Calcule  $\frac{df}{dx}$  para cada una de las siguientes funciones, utilizando las reglas generales de derivación.

(a)  $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

(j)  $f(x) = \frac{2 + \cos x}{3 + \sin x}$

(b)  $f(x) = (x + 2)(x + 3)(3x + 1)(2 + 5x^2)$

(k)  $f(x) = \frac{\sqrt{x} + x}{x^2 + 1}$

(c)  $f(x) = 7\cos x + 5\sin x + xe^x$

(l)  $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{x \ln x}$

(d)  $f(x) = 2x \sin x - (x^2 - 2)e^x$

(m)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \sin x$

(e)  $f(x) = e^x \cos x + \ln 3$

(n)  $f(x) = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$

(f)  $f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^3}{3} + e^x$

(ñ)  $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1 + x}$

(g)  $f(x) = x(3 + x^2) + \ln 2$

(h)  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(o)  $f(x) = \frac{x + e^x}{5 - x} + \operatorname{tg} x$

(i)  $f(x) = \frac{x - 1}{x}$

(p)  $f(x) = (\ln x \log_a x) - (\ln a \log_a x)$

**Ejercicio 10.** Una bola de radio  $r$  tiene volumen  $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$  y superficie  $S(r) = 4\pi r^2$ .

(a) Demuestre que  $S(r) = \frac{dV}{dr}$ .

(b) Halle una relación análoga entre el área de un círculo de radio  $r$  y la longitud de su circunferencia.

**Ejercicio 11.** Un tanque cilíndrico de 2m de radio se está llenando a razón de  $1 \text{ m}^3$  cada 2 minutos. ¿Cuál es la velocidad con la que aumenta la altura del líquido en el tanque, si dicha altura se mide en metros y el tiempo en minutos?

**Ejercicio 12.** Calcule  $D_x f$  para cada una de las siguientes funciones, aplicando la regla de la cadena, es decir la propiedad de derivación de las funciones compuestas.

(a)  $f(x) = (1 + x)^{129}$

(h)  $f(x) = e^{x^2+3x}$

(b)  $f(x) = \cos(3x)$

(i)  $f(x) = \ln(e^x + \sin 5x)$

(c)  $f(x) = \ln(\sin x)$

(j)  $f(x) = 2^{\sin x}$

(d)  $f(x) = \operatorname{tg}(5x^5)$

(k)  $f(x) = 3^{\cos x} + \sin^2 x$

(e)  $f(x) = \ln(x^5)$

(l)  $f(x) = e^{\sin x} - 3\pi e^{\operatorname{tg} x}$

(f)  $f(x) = 3 \sin^4 x$

(m)  $f(x) = (a + bx^4)^{\frac{1}{3}}$

(g)  $f(x) = \ln^5 x$

$$(n) f(x) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$(p) f(x) = (3\cos^3 x)^{-1} - (\operatorname{sen}(\ln x))^{-1}$$

$$(\tilde{n}) f(x) = 3 \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)} + \frac{\operatorname{sen}^3(ax)}{3\cos(bx)}$$

$$(q) f(x) = 3 \operatorname{sen}^5(x^3) + \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$$

$$(r) f(x) = [\operatorname{ctg}(\sqrt{x} + \ln x)]^{\frac{1}{4}}$$

$$(o) f(x) = \ln(\operatorname{sen}(x^2)) + (2x + 1)^{-\frac{1}{2}} - e^{\cos(2x)}$$

$$(s) f(x) = \operatorname{sen}^3(\ln \sqrt{x}) \cos^2(e^{3x} + 1)$$

**Ejercicio 13.**

(a) Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^3 + x$ . Calcular  $(f^{-1})'(0)$  y  $(f^{-1})'(2)$ .

(b) Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^{11} + x^9 + 2x^3 + 2x + 5$ . Calcular  $(f^{-1})'(5)$ .

**Ejercicio 14.** Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = \arcsin x$$

$$(d) f(x) = \operatorname{arcctg} x$$

$$(b) f(x) = \arccos x$$

$$(e) f(x) = \arcsin \sqrt{x}$$

$$(c) f(x) = \arctan x$$

$$(f) f(x) = \ln(\arccos x)$$

**Ejercicio 15.** Usando el método de derivación logarítmica calcule las derivadas de cada una de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = x^{3x}$$

$$(f) f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$(b) f(x) = (\sqrt{x+1})^x$$

$$(g) f(x) = (\operatorname{sen} x)^{x^2}$$

$$(c) f(x) = (\ln x)^x$$

$$(h) f(x) = (\ln x)^{x^2+x}$$

$$(d) f(x) = (\ln x)^{\ln x}$$

$$(i) f(x) = (\operatorname{sen}^3 x)^{\ln x}$$

$$(e) f(x) = (\cos x)^{e^x}$$

$$(j) f(x) = x^{(x^x)}$$

**Ejercicio 16.** Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = x^{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\operatorname{sen} 3x}$$

$$(b) f(x) = x[(\operatorname{sen} x)^{x^2} + \pi e^x]$$

$$(c) f(x) = \frac{x e^{(\sqrt[3]{x} + \cos x - 1)}}{\operatorname{sen} x + \ln(x^2 + e)} + (\cos x)^{\frac{1}{x}} + (\sqrt{2})^\pi$$

**Ejercicio 17.** Dos móviles se desplazan con trayectoria rectilínea con las siguientes leyes del movimiento (donde  $t$  representa el tiempo):

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 6t^2 + 10$$

$$g(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t + 2$$

- (a) Determine el instante  $t_0$  en el cual ambos móviles tienen la misma velocidad.
- (b) Calcule la aceleración de cada uno de los móviles en función del tiempo.

**Ejercicio 18.** Una piedra lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de  $34,3 \text{ m/s}$  se desplaza siguiendo la ley de movimiento  $s(t) = 34,3t - 4,9t^2$ .

- (a) Calcule la velocidad y la aceleración en los instantes  $t_1 = 3$  y  $t_2 = 4$ .
- (b) Determine el instante  $t_3$  en el que la piedra alcanza la altura máxima. (Pista: la velocidad en el instante  $t_3$  debe ser 0.)

**Ejercicio 19.** Determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal al gráfico de cada una de las siguientes funciones, en los puntos cuyas abscisas se indican en cada caso :

- (a)  $f(x) = 3x^2 - 1$  en  $a = 1$ ,  $a = 0$       (e)  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  en  $a = 0$
- (b)  $f(x) = \sin x$  en  $a = \frac{\pi}{2}$       (f)  $f(x) = (\sqrt{x} + x)^2$  en  $a = 4$
- (c)  $f(x) = \ln x$  en  $a = 1$       (g)  $f(x) = e^{-x^2}$  en  $a = 0$ ,  $a = 1$
- (d)  $f(x) = \frac{x-1}{x+5}$  en  $a = 2$       (h)  $f(x) = e^x(x + \ln x)$  en  $a = 1$

**Ejercicio 20.** Consideremos las funciones  $f(x) = x^3 + 2$ ,  $g(x) = 2x^2 + 2$ .

- (a) Probar que los gráficos de ambas funciones se cortan en dos puntos.
- (b) Verificar que en uno de esos puntos de intersección ambas curvas tienen la misma recta tangente. ¿Qué pasa en el otro punto de intersección?

**Ejercicio 21.** Sea  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . El gráfico de la función  $A(x) = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$  se conoce como 'curva de Agnesi'. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a dicha curva en el punto de abscisa  $x_0 = 2a$ .

**Ejercicio 22.** Determine en qué punto de la curva  $y = \ln x$  la recta tangente es paralela a la recta  $L$  que une los puntos  $(1,0)$  y  $(e,1)$ .

**Ejercicio 23.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 2x^3$  y sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  otra función de la que sólo sabemos que  $g'(2) = 4$ . Calcular la derivada de  $(g \circ f)$  en el punto  $x_0 = 1$ .

**Ejercicio 24.** Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(g(x^2 + x)) + 3g(x) = 3 \operatorname{tg}(x) + 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , y donde  $g$  cumple, además, que  $g(0) = 0$  y  $g'(0) = 2$ .

(a) Calcular  $f'(0)$ .

(b) Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de  $f$  en  $x = 0$ .

**Ejercicio 25.** El 'Teorema del coseno' permite expresar la longitud del lado  $a$  del triángulo  $\triangle ABC$  a partir de los otros dos lados y el ángulo opuesto  $A$  por la fórmula:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

Si mantenemos  $b$  y  $c$  constantes,  $a$  resulta ser función del ángulo  $A$ . En estas condiciones, demuestre que  $\frac{da}{dA} = h_a$  es precisamente la altura del triángulo correspondiente a la base  $a$ .

**Ejercicio 26.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-1|} & \text{si } x \leq 2 \\ \cos(x-2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$ .

(a) Analice la continuidad de  $f$  en  $x = 2$ .

(b) Mediante el estudio de cocientes incrementales estudie la derivabilidad de  $f$  en  $x_1 = 1$  y en  $x_2 = 2$ .

**Ejercicio 27.** Estudie la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x \leq -1 \\ \frac{\cos(x\pi)}{\pi} & x > -1 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ 3x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x+3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$(g) f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = |(x-1) \cdot (x+1)|$$

$$(h) f(x) = \sqrt{|x|} \operatorname{sen}(4|x|)$$

**Ejercicio 28.** Hallar todos los coeficientes  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tales que existe  $f'(1)$  si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \geq 1 \\ a(x-1)^2 + b(x-1) + c & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 29.** Calcule las derivadas segunda y tercera de cada una de las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = 3x^3 + 5x - 1$

(d)  $f(x) = (x^2 + 1)^5$

(b)  $f(x) = \ln(7x)$

(e)  $f(x) = \text{sen}(4x)$

(c)  $f(x) = e^{-x}$

(f)  $f(x) = \cos(2x^3)$

**Ejercicio 30.**

(a) Calcule las derivadas séptima y octava de  $f(x) = x^7 - 5x^4 + 8x$ .

(b) Calcule las derivadas de orden  $n$  y  $n + 1$  de un polinomio de grado  $n$ .

(c) Calcule la derivada octava de  $f(x) = \text{sen } x$ . ¿Qué conclusiones obtiene? ¿Cómo calcularía la derivada de orden 25 de  $f(x)$  ?

(d) Lo mismo que en el ítem (c) pero para  $g(x) = \text{cos } x$ .