Análisis I – Matemática I – Análisis II (C)
Primer Cuatrimestre - 2013

Práctica 7: Extremos restringidos - Multiplicadores de Lagrange

1. Determinar los extremos absolutos de $f|_A$ en los siguientes casos:

   (a) $f(x,y) = xy(x-y)^2 \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$;

   (b) $f(x,y) = xy(x-y)^2 \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$;

   (c) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 3, |y| \leq 3\}$;

   (d) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \quad A = \mathbb{R}^2$;

   (e) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

2. Considerar el cuadrado de vértices $(-1,0), (1,0), (1,-2)$ y $(-1,-2)$. Sea A la región determinada por el cuadrado y su interior. Encontrar los extremos absolutos de la función
$$f(x,y) = 2x - y^2$$
en el recinto B, donde B es el recinto
$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1\Big\} \cap A.$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función
$$f(x,y) = (y-1)^2 - x^3 + 3x^2 + 5.$$
Encontrar, justificando su existencia, el máximo y el mínimo valor que alcanza f en la región
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \leq y \leq 4\}.$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x + \frac{1}{4}.$$
Encontrar, justificando su existencia, el máximo y el mínimo valor que alcanza f en la región
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1; \ x + y \geq 0\}.$$

5. Encontrar el punto de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al $(1,0)$ es mínima

   (a) Usando multiplicadores de Lagrange;

   (b) Reduciéndolo a trabajar con una función de una variable.

6. Encontrar los máximos y mínimos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$ dentro del círculo unitario y en el borde.

7. Encontrar los máximos y mínimos de $f(x,y) = y + x - 2xy$ en el interior y en el borde de
$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

8. Encontrar los extremos de f sujetos a las restricciones mencionadas:

   (a) $f(x,y,z) = x - y + z$ $\quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$
   (b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 2y^2 = 1\}$
   (c) $f(x,y) = xy$ $\quad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{|xy|}{|xy|+1} \leq 1\right\}$
   (d) $f(x,y) = \max(x,y)$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$
   (e) $f(x,y,z) = x + y + z$ $\quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 = 1, 2x + z = 1\}$
   (f) $f(x,y,z,w) = x + y - z - w$ $\quad A = \{(x,y,z,w) / x^2 + y^2 = 1 \text{ y } w = x + z\}$

9. Resolver los siguientes problemas geométricos mediante el método de Lagrange:

   (a) Encontrar la distancia más corta desde el punto $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ hasta el plano de ecuación $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ donde $(b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0)$.
   (b) Encontrar el punto sobre la recta de intersección de los dos planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ que esté más cerca del origen.
   (c) Mostrar que el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que puede inscribirse en el elipsoide
   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
   es $8abc/3\sqrt{3}$.

10. Encontrar la distancia mínima entre la parábola $y = x^2$ y la recta $x - y - 2 = 0$.

11. Encontrar el punto de la superficie $z = xy - 1$ más cercano al origen.

12. Si α, β, γ son tres ángulos positivos tales que $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$, entonces
$$\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\gamma) \leq \frac{1}{8}$$

13. La temperatura de una placa en un punto cualquiera (x,y) viene dada por la función $T(x,y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, se dispara a temperaturas superiores a 180 grados o inferiores a 20 grados. ¿Se disparará la alarma?

14. Sea E el elipsoide definido por
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 3x^2 + y^2 - 2xy + z^2 = 1\}.$$
Encontrar el punto $p \in E$ más lejano al plano yz.

15. Encontrar los puntos del cono

$$z^2 = (y-2)^2 + (x-1)^2$$

más cercanos al origen de coordenadas.

16. Encontrar los puntos más lejanos y cercanos al punto $(0, 0, 2)$ de la esfera de ecuación

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$$

17. En una empresa se fabrican recipientes con forma de prisma rectangular con las siguientes características: la suma de todas sus aristas es de 30 metros y su superficie total es de 36 metros cuadrados. Determinar la capacidad máxima y mínima de estos recipientes.
Sugerencia: El prisma rectangular que fabrica la empresa no es otra cosa que una caja de zapatos gigante. Tener en cuenta la simetría de las variables en las formulas involucradas.