El anulador (cont)

Proposición: Sea V un K-e.v de ~~dimensión~~ de dim finita

① Sea S subespacio de V. Entonces $S = \{v \in V : \varphi(v) = 0, \forall \varphi \in S^\circ\}$

② Sean S, T subespacios de V. Entonces $S = T \iff S^\circ = T^\circ$.

Demostración: ① Observemos que $T = \{v \in V : \varphi(v) = 0, \forall \varphi \in S^\circ\}$ es un subespacio de V, que contiene a S por definición.

Para probar que $S = T$, mostremos que $\dim(S) = \dim(T)$:

Completemos una base de S° a una base de V^*:

$\mathcal{B}' = (\underbrace{\varphi_1, \dots, \varphi_r}_{\text{base de } S^\circ \text{ (luego } r = n-s)}, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n)$, y sea $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ t.q

$\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'$. Se afirma que $T = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$, y luego $S = T$ por dimensión:

Está claro que $v_{r+1}, \dots, v_n \in T$ pues por def de base dual:

$\varphi_1(v_{r+1}) = \dots = \varphi_1(v_n) = 0, \dots, \varphi_r(v_{r+1}) = \dots = \varphi_r(v_n) = 0$.

luego $\varphi(v_{r+1}) = \dots = \varphi(v_n) = 0, \forall \varphi \in S^\circ$

Alcanza con probar entonces que si $v \in T$, entonces $v \in \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$:

$v = \varphi_1(v) v_1 + \dots + \varphi_r(v) v_r + \varphi_{r+1}(v) v_{r+1} + \dots + \varphi_n(v) v_n$, $\forall v \in V$

Si $v \in T$ se tiene $\varphi_1(v) = \dots = \varphi_r(v) = 0$, y luego $v \in \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$ como se quería probar

② Ejercicio

Anulador de la intersección y de la suma

Proposición: Sea V un K-e.v y sean S, T subespacios de V.

Entonces:

① $(S+T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$

② $S^\circ + T^\circ \subseteq (S \cap T)^\circ$ y si $\dim_K(V) < \infty$, entonces $(S \cap T)^\circ = S^\circ + T^\circ$

Demostración

① $\varphi \in (S+T)^\circ \iff \varphi(v) = 0, \forall v \in S+T$

$\iff \varphi(s+t) = 0, \forall s \in S, \forall t \in T$

$\iff \varphi(s) + \varphi(t) = 0, \forall s \in S, \forall t \in T$

hacer $\Rightarrow$ en detalle $\iff \varphi(s) = 0, \forall s \in S$, y $\varphi(t) = 0, \forall t \in T$

$\iff \varphi \in S^\circ \cap T^\circ$

② $S^\circ + T^\circ \subseteq (S \cap T)^\circ$:

Sea $\varphi = \varphi_S + \varphi_T \in S^\circ + T^\circ$, con $\varphi_S \in S^\circ$ y $\varphi_T \in T^\circ$:

Entonces, $\forall\, v \in S\cap T$, se tiene $\varphi(v) = \varphi_S(\underset{\underset{S}{\cap}}{v}) + \varphi_T(\underset{\underset{T}{\cap}}{v}) = 0+0=0$ ①

Así $\varphi \in (S\cap T)^\circ$.

Para probar que son iguales, usaremos un argumento de dimensión:

$$\dim(S^\circ + T^\circ) = \dim(S^\circ) + \dim(T^\circ) - \dim(S^\circ\cap T^\circ)$$
$$= \dim(S^\circ) + \dim(T^\circ) - \dim((S+T)^\circ)$$
$$= \dim(V) - \dim(S) + \dim(V) - \dim(T) - \dim(V) + \dim(S+T)$$
$$= \dim(V) - \dim(S\cap T) = \dim((S\cap T)^\circ)$$

Luego $S^\circ + T^\circ \subseteq (S\cap T)^\circ$ y tienen igual dimensión: son iguales. $\boxtimes$

Corolario (ejercicio)

Sea V un K-e.v de dimensión finita y sean S, T subespacios de V tq $V = S\oplus T$. Entonces $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$.

Comentario para terminar:

Hiperplanos en e.v. de dimensión ∞:

Cuando $\dim_K(V) = \infty$, no se puede decir que un subespacio S de V es un hiperplano cuando $\dim(S) = \dim(V) - 1$ ...

Pero en dimensión finita, los hiperplanos son el conjunto de ceros en V de un funcional lineal no nulo, y eso sí tiene sentido en dimensión ∞ también. Esta definición satisface la intuición natural que si $H \subseteq V$ es un hiperplano, y agregamos a H un vector $v \notin H$, se obtiene $V = H + \langle v\rangle$:

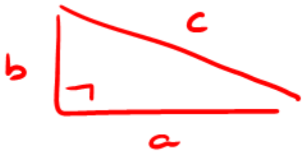
pues si $H = Nu(\varphi)$, se tiene $v\notin H \iff \varphi(v)\neq 0$, luego dado $w\in V$ cualquiera, tiene sentido $\dfrac{\varphi(w)}{\varphi(v)} = k \in K$. Por lo tanto

$$0 = \varphi(w) - k\varphi(v) = \varphi(w - kv) \Rightarrow w - kv \in Nu(\varphi) = H.$$

Así $w = \underset{\underset{H}{\cap}}{(w-kv)} + \underset{\underset{\langle v\rangle}{\cap}}{kv}$, o sea $V = H + \langle v\rangle$.

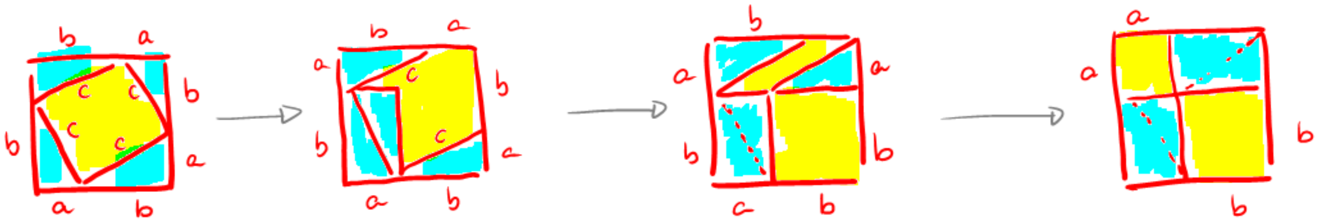
Espacios con producto interno

Teorema de Pitágoras (S. VI AC)

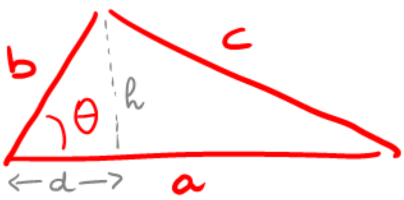


$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (\Leftrightarrow \llcorner)$$

una hermosa demostración



Teorema del coseno (S. IV D.C)

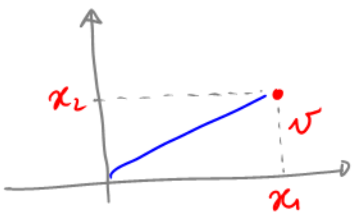


$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

demostración:
- $\cos\theta = \dfrac{d}{b} \Rightarrow d = b\cos\theta$
- $d^2 + h^2 = b^2$ y $(a-d)^2 + h^2 = c^2$

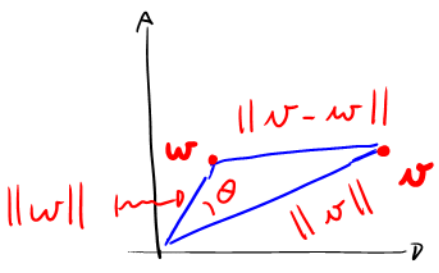
luego $c^2 = (a-d)^2 + b^2 - d^2 = a^2 - 2ad + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

Longitud - Norma y Angulo - Producto escalar en $\mathbb{R}^2$



$\|v\|$ = lo que mide v $= d(v, 0)$

$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ Por el teo Pitágoras



Miremos $\|v\|\|w\|\cos\theta =$

$$\frac{\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2}{2} =$$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - [(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2]}{2} = x_1y_1 + x_2y_2$$

producto escalar!

Probamos que en $\mathbb{R}^2$, dados v, w y θ el ángulo

$$\|v\| \cdot \|w\| \cos\theta = \langle v, w \rangle$$

i.e. $\cos\theta = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$

Producto escalar (producto interno canónico) en $\mathbb{R}^2$

Sean $v = (x_1, x_2)$, $w = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. El producto interno canónico de v y w es $\langle v, w\rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 = v^t \cdot w$

$$(x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

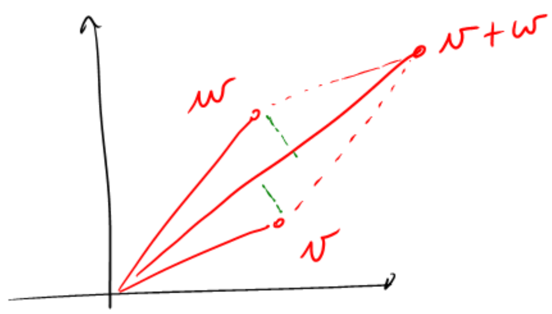
Satisface:

- $\langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$
- $\langle v, w\rangle = \|v\|\,\|w\| \cos\theta$ ← teo coseno

  (y así $\cos\theta = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$ para $v, w \neq 0$)
- $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$ ← $\|v\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es lo que mide v, o $d(v, 0)$. (norma de v)
- $v \perp w \iff \cos\theta = 0 \iff \langle v, w\rangle = 0$ perpendicularidad

  (Se extiende al vector nulo diciendo que $0 \perp v$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$)
- PITAGORAS: $v \perp w \iff \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$
- Desigualdad triangular:

  $$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$



- Desigualdad de Cauchy (1821) - Bunyakovsky (1859) - Schwarz (1881)

  $$-1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \leq 1,$$ i.e. $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|$

Ejemplos $(1,3) \perp (-3,1)$, $\{v \in \mathbb{R}^2 / v \perp (-1,3)\}$, angulo entre $(1, \sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3}, 3)$.

Observación Sobre $\mathbb{C}$ se pierde esa propiedad natural de ángulo, pero si se quiere mantener la noción de distancia:

Para $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$, se quiere $\|v\| = d(v, 0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

pero eso no se logra haciendo $\|v\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ como en $\mathbb{R}^2$...

Sino que se generaliza el módulo de $\mathbb{C}$: $\|v\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2$

$= x_1 \cdot \overline{x_1} + x_2 \cdot \overline{x_2}$.

Esto motiva que en $\mathbb{C}^2$ la definición de producto interno canónico es $\langle v, w \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$ para $v = (x_1, x_2)$, $w = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$

Y se hablará de ortogonalidad:

$$v \perp w \iff \langle v, w \rangle = 0$$

$\boxed{\text{En todo este tema, } K = \mathbb{R} \text{ ó } K = \mathbb{C}}$

Definición (Producto interno)

Sea V un K-e.v, con $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Se dice que ϕ es un producto interno en V si

(0) $\phi : V \times V \to K$ (ϕ es fción de $V \times V$ en K)

(1) $\phi(v + v', w) = \phi(v, w) + \phi(v', w)$, $\forall v, v', w \in V$
$\phi(kv, w) = k\,\phi(v, w)$, $\forall k \in K, v, w \in V$ } bilineal en 1er variable

(2) $\phi(w, v) = \phi(v, w)$ en el caso $K = \mathbb{R}$ (simétrica)
y $\phi(w, v) = \overline{\phi(v, w)}$ en el caso $K = \mathbb{C}$ (alternada)

(3) $\phi(v, v) \in \mathbb{R}_{>0}$ si $v \neq 0$

$\phi(v, v) = \overline{\phi(v, v)} \Rightarrow \phi(v, v) \in \mathbb{R}$

$\phi(v, w)$ se suele notar $\langle v, w \rangle$. O sea

(0) $\forall v, w \in V$ se tiene $\langle v, w \rangle \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$)

(1) $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$
$\langle kv, w \rangle = k \langle v, w \rangle$

$\xRightarrow{(2)}$ $\langle v, kw \rangle = \overline{k} \langle v, w \rangle$
$\langle v, w + w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$

(2) $\langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}$

(3) $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle \in \mathbb{R}_{>0}, \forall v \neq 0$

(para $k = 0$: $\langle 0_V, w \rangle = \langle 0 \cdot v, w \rangle = 0 \langle v, w \rangle = 0$, y $\|0\| = 0$)

Ejemplos

① Productos internos canónicos:

- En $\mathbb{R}^n$: $v = (x_1, .., x_n)$, $w = (y_1, .., y_n)$

$$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = v^t . w$$

(se entiende vectores columna)

- En $\mathbb{C}^n$: $v = (x_1, .., x_n)$, $w = (y_1, .., y_n)$

$$\langle v, w \rangle = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n} = v^t . \overline{w}$$

(En algunos textos aparece $\langle v, w \rangle = \overline{x_1} y_1 + \dots + \overline{x_n} y_n = \overline{v}^t . w$
no es importante mientras se es consistente)

- En $\mathbb{C}^{m \times n}$: $\langle A, B \rangle = tr(A B^*) = \sum_{i,j} A_{ij} \overline{B_{ij}}$

donde $B^* = \overline{B^t} = \overline{B}^t$ (la transpuesta conjugada de B)

se suele llamar la matriz adjunta de B también

(En $\mathbb{R}^{m \times n}$: $\langle A, B \rangle = tr(A \overline{B})$)

- En $C[a,b]$ para $a < b$ en $\mathbb{R}$: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$

Vocabulario:

Un espacio vectorial real con producto interno $(V_{\mathbb{R}}, \langle , \rangle)$ se llama espacio euclídeo (Euclides, 300 AC)

Un espacio vectorial complejo con producto interno $(V_{\mathbb{C}}, \langle , \rangle)$ se llama espacio unitario o hermítico (Hermite)

(A veces son nombres para dimensión finita)