1	2	3	4	5	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

ANÁLISIS 1

Final - 22/02/2011

1. *a*) Probar que existe la integral impropia $\int_1^\infty te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ y calcularla.

b) Probar que la función $F:\mathbb{R}_{\geq 1}\to\mathbb{R}$ dada por $F(x)=\int_1^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ es creciente y acotada.

c) ¿Existe $\int_1^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$?

2. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase C^2 y $x_0\in\mathbb{R}^2$. Consideremos las siguientes condiciones sobre f:

1) $\nabla f(x_0)=(1,0)$.
2) La matriz Hessiana $Hf(x_0)$ de f en el punto x_0 es la matriz nula.
3) $\nabla f(x_0)=(0,0)$.
4) $Hf(x_0)$ es definida negativa.
5) $Hf(x_0)$ es definida positiva.

a) ¿Cuáles de estas condiciones son necesarias para que f tenga un mínimo relativo en x_0?

b) ¿Cuáles son todas las condiciones que *impiden* que f tenga un mínimo relativo en x_0?

c) ¿Es posible encontrar dos o más condiciones que juntas aseguren que f tiene un mínimo relativo en x_0?

3. Pruebe que si la función $u(x,y)$ de clase C^2 satisface la ecuación diferencial de Laplace

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ entonces la función

$$v(x,y)=u\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

también la satisface.

4. Sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $F(0,0)=1$ y $\nabla F(0,0)=(1,1)$.

- ¿Es cierto que existen infinitos puntos (x,y) tales que $F(x,y)=1$?
- Sea $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(2t-1,t^2-1/4)$ y sea $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ la función $g(t)=F(\gamma(t))$. Calcular $g'(1/2)$. Probar que g es creciente en un intervalo abierto alrededor del punto $1/2$.

5. Sea b un número real positivo. Calcular el volumen del tetraedro en $\mathbb{R}^3$ delimitado por los planos $x=0,y=0,z=0$ y $2bx+2y+z=2b$.

Justifique todas sus respuestas.