1	2	3	4	5	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

ANALISIS I

Examen Final- 1/3/2011

---

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface que:

$$f(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

Probar que f es idénticamente cero.

Sugerencia: considerar la función $g(x) = f(x)e^{-x}$

2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Probar que para cada $v \in \mathbb{R}^2$ con $\|v\| = 1$ existe la derivada direccional $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0)$ y calcularla.

b) ¿Es F diferenciable en $(0,0)$?

3. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

i) "Sea $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x)$ es identicamente nula. Entonces f es constante".

ii) "Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Si f tiene un mínimo local en $(1,3)$ entonces la matriz $Hf(1,3)$ es definida positiva."

iii) "Sea $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y además $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Entonces f está acotada superiormente en $[1, +\infty)$."

4. Sea $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Consideramos la función $v : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(x,y) = u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Encontrar una expresión para el Laplaciano de v (definido como $\Delta v = v_{xx} + v_{yy}$), en la que aparezcan las derivadas de u hasta el orden 2.

5. Calcular la integral $\int\int_R (x-y)^2 dxdy$, donde R es el paralelogramo con vértices $(0,0), (1,1), (2,0)$ y $(1,-1)$ aplicando el cambio de variables $u = x - y, v = x + y$.

Justifique todas sus respuestas.