1	2	3	4	5	Calificación

Apellido y Nombre:
No. de libreta: Carrera:

ANÁLISIS 1

Final - 14/12/2010

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Probar que f es continua en $\mathbb{R}^2$.
b) Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = 1$, existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.
c) Analizar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ la función f es diferenciable.

2. Sea $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ continua y derivable en $\mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(0) = 1$ y $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ para todo $x > 0$.

a) Probar que la función $g(x) = x - f(x)$ es inyectiva.
b) Probar que existe un único $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(x_0) = x_0$.

3. Para cada valor de $b \in \mathbb{R}$ encontrar el valor máximo y el valor mínimo que toma la función

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{b\,y^2}{2},$$

en el disco $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4. Sea $g : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \int_{-1}^{x} e^{-t^2} dt - \int_{-1}^{0} e^{-t^2} dt.$$

a) Probar que g es una función de clase C^2.
b) Probar que el polinomio de Taylor de orden 1 de g en $x_0 = 0$ es $P_1(x) = x$.
c) Encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ el error que se comete al aproximar $g(x)$ por x sea a lo sumo $\frac{1}{100}$.
d) ¿Cuál es el polinomio de Taylor de orden 2 de g en $x_0 = 0$?

5. Encontrar todos los $p \in \mathbb{R}$ tales que existe

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\varepsilon^2 \leq x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2)^p \, dxdy$$

y calcularlo en ese caso.

Justifique todas sus respuestas.