Práctica 3

1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $A,B\subseteq\mathbb{R}$ y $X,Y\subseteq\mathbb{R}$. Decidir en cada caso si corresponde $\subseteq,\supseteq$ ó $=$ y probarlo.

$$\begin{array}{ccccc} (i) & f(A\cup B) & \ldots\ldots & f(A)\cup f(B) \\ (ii) & f^{-1}(X\cup Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X)\cup f^{-1}(Y) \\ (iii) & f(A\cap B) & \ldots\ldots & f(A)\cap f(B) \\ (iv) & f^{-1}(X\cap Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y) \\ (v) & f(A^c) & \ldots\ldots & f(A)^c \\ (vi) & f^{-1}(X^c) & \ldots\ldots & (f^{-1}(X))^c \end{array}$$

2. Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Probar que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ si y solo si para toda sucesión estrictamente decreciente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, vale $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$.

3. Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monótona y $x\in(a,b]$. Demostrar que si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(a,x)$ que converge a x y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$, entonces $f(x^-)=l$.

   Enunciar el resultado correspondiente para $f(x^+)$.

4. Sean $A,B\subseteq\mathbb{R}$ y sean $f:A\to\mathbb{R}$, $g:B\to\mathbb{R}$ tales que $f(A)\subset B$. Si f es continua en $a\in A$ y g es continua en $f(a)$, probar que $g\circ f$ es continua en a.

5. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x)=f(y)$ para todo $x,y\in\mathbb{Q}$. Demostrar que f es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre $\mathbb{Q}$ son iguales.

6. Hallar todos los puntos donde la función f es continua, siendo

   (a) $f:[0,1]\to[0,1]$ la función:

   $$f(x)=\begin{cases} x, & \text{si } x\in\mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}.$$

   (b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función:

   $$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } x=\frac{a}{b} \text{ con } a,b\in\mathbb{Z} \text{ coprimos y } b>0 \\ \\ 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}.$$

7. Sea $f:[a,b]\to[a,b]$ continua. Demostrar que existe $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=c$. *Sugerencia.* Considerar la función $x-f(x)$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Probar que son equivalentes:
   (a) f es continua (en todo $\mathbb{R}$).
   (b) $f^{-1}(O)$ es abierto para todo $O \subseteq \mathbb{R}$ abierto.
   (c) $f^{-1}(F)$ es cerrado para todo $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado.
9. Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.
10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Probar que f alcanza su mínimo valor.
11. Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar:
    (a) $\{|x| : x \in K\}$ es compacto.
    (b) Dado $c \in f(K)$ existe entre las raíces x de la ecuación $f(x) = c$, una de módulo mínimo.
12. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes:
    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = |x|$.
    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = x^2$.
    (c) $f : (r, +\infty) \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sqrt{x}$, con $r = 0$ y con $r > 0$.
    (d) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \mathrm{sen}(\frac{1}{x})$.
    (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
    (f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = d(x, S)$, donde $S \subseteq \mathbb{R}$.
13. Sea $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Demostrar que f es uniformemente continua en S si y solo si para todo par de sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de S tal que $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$, se verifica $\lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$.
14. Mostrar que $f(x) = \mathrm{sen}\left(x^2\right)$ no es uniformemente continua sobre $\mathbb{R}$.
15. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f, g : S \to \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas.
    (a) Probar que $f + g$ es uniformemente continua.
    (b) Mostrar con un ejemplo que $f \cdot g$ puede no ser uniformemente continua, aún si alguna de las funciones f ó g es acotada.
    (c) Probar que si $h : f(S) \to \mathbb{R}$ es otra función uniformemente continua entonces $h \circ f : S \to \mathbb{R}$ también lo es.
16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$. Probar que f es uniformemente continua en $[a, c]$.

    ¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y también sobre un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, entonces lo es en $A \cup B$?

17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sean x_0 y α números reales. Se dice que f *es localmente Lipschitz de orden* α *en el punto* x_0 si existen $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha \quad \text{para todo } x \quad \text{tal que } \ 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

M se llama *la constante de Lipschitz de* f. Cuando $\alpha = 1$ decimos simplemente que f es *Lipschitz.*

(a) Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0 entonces f es continua en x_0.

(b) Mostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en x_0, entonces f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$.

18. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es *Lipschitz* si existe una constante $M > 0$, llamada la constante de *Lipschitz* de f, tal que

$|f(x) - f(y)| < M|x - y|$ para todo $x\ , y \in A$.

Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Demostrar que f no es Lipschitz pero sin embargo f es uniformemente continua (en particular "*unif. cont.* $\not\Rightarrow$ *Lipschitz*").

19. Sea $S \subset \mathbb{R}$ y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz con constante igual a $M < 1$. Demostrar que si S es cerrado, y $f(S) \subseteq S$ entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$, en otras palabras, f *tiene un punto fijo.*

Sugerencia. Considerar la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en S construída recursivamente así: $x_1 \in S$ cualquiera, si x_n está definido se toma $x_{n+1} := f(x_n)$, en otras palabras, $x_{n+1} := f^{(n)}(x_1)$. Probar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y tomar $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone S cerrado.

20. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2}$. Demostrar que f es Lipschitz con $M = 1$ pero que f no tiene puntos fijos.

21. Estudiar si las funciones que siguen son de variación acotada en el intervalo $[a, b]$ correspondiente y en el caso afirmativo dar una mayoración para $V_f(a, b)$.

(a) $f(x) = \cos(x)$ en $[0, 3\pi]$ (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } \ 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ en $[-1, 2]$ (d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left[\left(\frac{\pi}{x}\right)^2\right] & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

En el caso (d) estudiar también la derivabilidad de f.

22. Demostrar que si f y g son funciones de variación acotada en $[a, b]$ entonces $f + g$ y fg también lo son.

23. Para las funciones de variación acotada que siguen, hallar la función V_f (recordamos que $V_f(a) = 0$ y $V_f(x) = V_f(a, x)$ si $a < x \leq b$):

(a) $$f(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(b) $f(x) = \operatorname{sen} x \quad$ en $[0, 2\pi]$

Para cada función encontrar explícitamente funciones monótonas crecientes g_1 y g_2 tales que $f = g_1 - g_2$.