Práctica 2

1. Decir qué propiedades (abierto, cerrado, acotado) tienen los siguientes conjuntos.

   a) $\mathbb{Q}$.

   b) $\mathbb{N}$.

   c) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

   d) $(0, 1]$.

   e) $\left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

   f) $\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

2. Sean S, T subconjuntos de $\mathbb{R}$. Demostrar las propiedades siguientes:

   a) Si $S \subseteq T$ entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$.

   b) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?

   c) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. ¿Vale la igualdad?

   d) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?

   e) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿Vale la igualdad?

   f) $(\mathbb{R} - S)^\circ = \mathbb{R} - \overline{S}$.

3. En cada uno de los siguientes casos hallar $S^\circ, \overline{S}$ y ∂S.

   a) $S = [0, 1]$.

   b) $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

   c) $S = [-1, 0) \cup \{1\}$.

   d) $S = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

   e) $\left\{\frac{(-1)^n n}{1+n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

   f) $S = \mathbb{Z}$.

4. Sea $S \subset \mathbb{R}$. Demostrar :

   a) S es abierto si y solo si es disjunto con ∂S.

   b) S es cerrado si y solo si $\partial S \subset S$.

   c) S es cerrado si y solo si $\mathbb{R} - S$ es abierto.

5. Sea $S \subset \mathbb{R}$. Demostrar que $\partial S = \overline{S} \cap \overline{\mathbb{R} - S}$.

6. Si $S \subset \mathbb{R}$ notamos con S' al conjunto de todos los puntos de acumulación de S.

   a) Hallar S' para cada uno de los conjuntos del ejercicio 3.

   b) Un punto $p \in S$ se dice *punto aislado* de S si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap S = \{p\}$. Demostrar que $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.

7. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

8. Hallar todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que son a la vez abiertos y cerrados.

9. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se considera el intervalo abierto $I_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right)$. Demostrar que $(0,1) = \bigcup\limits_{n \geq 2} I_n$. ¿Existe un conjunto *finito* $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0,1) = \bigcup\limits_{n \in \mathcal{F}} I_n$? Justificar. ¿Qué puede decir sobre la compacidad del conjunto $(0,1)$?

10. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos:

    a) $\mathbb{Q}$.

    b) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

    c) $\mathbb{R}$.

    d) $[0,1] \cup [100, 1000]$.

    e) $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

    f) $\{ \sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N} \}$.

11. Sea K un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}$. Probar que K tiene mínimo y máximo.

12. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada y sea P el conjunto de sus puntos límite. Probar que P es compacto. Mostrar que el límite inferior de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es el mínimo de P y el límite superior de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ el máximo.

13. Sean $S, T \subset \mathbb{R}$ conjuntos compactos. Demostrar que $S \cup T$ y $S \cap T$ son compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?

14. Mostrar que si K es compacto y F es cerrado, entonces $K \cap F$ es compacto.

15. Determinar todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que tienen la siguiente propiedad: *Todo cubrimiento cerrado tiene un subcubrimiento finito.*

16. Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Probar que los siguientes conjuntos también son compactos:

    $S = \{x + y : x, y \in K\}$, $P = \{x.y : x, y \in K\}$.

17. Mostrar una sucesión decreciente $\{F_n\}$ de conjuntos cerrados no vacíos y una sucesión decreciente $\{E_n\}$ de conjuntos acotados no vacíos tales que $\bigcap\limits_{n} F_n = \emptyset$ y $\bigcap\limits_{n} E_n = \emptyset$.

18. Sean $S \subset \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$. Se define la *distancia* $d(p, S)$ entre p y S como

$$d(p, S) := \text{ínf}\{|p - x| : x \in S\}.$$

a) Demostrar que $|d(p, S) - d(q, S)| \leq d(p, q)$ para todo $p, q \in \mathbb{R}$.

b) Hallar todos los $p \in \mathbb{R}$ tales que $d(p, S) = 0$.

c) Demostrar que si S es cerrado la distancia entre un punto p y el conjunto S se realiza, es decir, existe $q \in S$ tal que $d(p, S) = |p - q|$.

d) Sea $\varepsilon > 0$ y sea $G = \{v \in \mathbb{R} : d(v, S) < \varepsilon\}$. Demostrar que G es abierto.

19. Sean $S, T \subset \mathbb{R}$. Se define la *distancia* entre S y T como

$$d(S, T) = \text{ínf}\{|x - y| : x \in S, y \in T\}.$$

a) ¿Es cierto que $d(S, T) = \text{ínf}\,\{d(p, T) : p \in S\}$?

b) Mostrar que no necesariamente siempre existen $p \in S$ y $q \in T$ tales que $d(S, T) = |p - q|$.

c) ¿Qué ocurre con la pregunta anterior si S y T son compactos? ¿Y si los dos son cerrados? ¿Y si uno es compacto y el otro cerrado ?