OPTIMIZACIÓN - 1er Cuatrimestre 2012

Práctica 6

Ejercicio 1 Sea el grafo dirigido $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 4), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (5, 6)\}$ con las siguientes longitudes de las ramas: $c_{12} = 2; c_{13} = 3; c_{14} = 6; c_{24} = 7; c_{25} = 8; c_{34} = 2; c_{36} = 9; c_{56} = 1$.

- Para cada vertice u sea $v(u) :=$ el vértice más próximo a u. A v la llamamos política miope. Hallar un camino del nodo $\{1\}$ al nodo $\{6\}$ usando la política miope.
- Hacer un planteo de Programación Dinámica para encontrar un camino de longitud máxima entre el nodo $\{1\}$ y el nodo $\{6\}$.

Ejercicio 2 Se tienen monedas de $5, 10, 25, 50$ y 100 centavos. Sea x entero múltiplo de 5. Llamemos $f(x)$ al mínimo número de monedas que suman x. Escriba la ecuación funcional de f según la Programación Dinámica. Usando el algoritmo de Programación Dinámica hallar la manera de juntar 165 centavos con un mínimo número de monedas.

Ejercicio 3 Hacer un planteo de Programación Dinámica para el problema de la mochila (KP).

Ejercicio 4 Para obtener el título de Doctor en Matemática uno de los requisitos es juntar por lo menos 20 puntos en materias optativas. Sea p_i el puntaje de la materia $i = 1, ..., N$, donde N es el número total de materias optativas. Los doctorandos han estimado un *costo* para las materias considerando aspectos como la modalidad de examen, la carga horaria, el puntaje que otorgan, etc. Sea c_i el costo de la materia i. Hacer el planteo de Programación Dinámica para los siguientes problemas, ambos con el objetivo común de sumar al menos 20 puntos.

- Que la suma de los costos sea mínima.
- Que el costo más alto sea mínimo.

Ejercicio 5 La Ciudad de Buenos Aires tiene P habitantes distribuidos en 15 comunas. Notamos p_i al número de habitantes de la comuna i. Se desea formar un concejo de R representantes ($R > 15$) y se pretende que cada comuna tenga un número de representantes proporcional a p_i. Sea $r_i = \frac{Rp_i}{P}$. Sea x_i el número de representantes de la comuna i. Hacer el planteo de Programación Dinámica con el objetivo de que sea mínima la mayor de las diferencias $|x_i - r_i|$.

Ejercicio 6 Asignación de Recursos Dadas N actividades, cada una de ellas con una función de beneficio: g_i (donde $g_i(t)$ es el beneficio obtenido al asignar t pesos a la actividad i). Se desea repartir entre algunas de estas actividades un presupuesto total de x pesos, de modo que el beneficio total obtenido sea máximo. Plantear el problema por Programación Dinámica.

Ejercicio 7 Se tiene un texto con N palabras $w_1, \ldots, w_N$, de longitudes $\ell_1, \ldots, \ell_N$ respectivamente. Se desea acomodar el texto en líneas de L caracteres. Al hacerlo, se separan las palabras con espacios en blanco. Idealmente, un espacio en blanco ocupa exactamente el lugar de un caracter. Sin embargo, en la práctica, los espacios en blanco se pueden estirar o comprimir para que las líneas tengan longitud exactamente L. Los espacios de una misma línea son iguales.

Consideramos que el costo de una línea está dado por el desvío de la medida de sus espacios respecto del espacio estándar (1 caracter por par de palabras). Es decir: si la línea j tiene las palabras $w_i, \ldots, w_{i+k}$, su costo es:

$$c_j = k|b_j - 1|$$

donde $b_j = (L - \ell_i - \ldots - \ell_{i+k})/k$. Para la última línea el costo es nulo si $b_j > 1$.

Hacer un planteo de programación dinámica que optimice la distribución del texto:

a) Minimizando el costo total.

b) Minimizando el costo de la peor línea.

Ejercicio 8 Medición con dos jarras: Se tienen dos jarras (A y B), en principio vacías, de capacidades P y Q respectivamente; y una tercer jarra C, llena, de capacidad $P+Q$. Se desea obtener, mediante pasajes de una jarra a la otra, exactamente T unidades de líquido. Hay seis posibles operaciones: *i.* llenar A desde C, *ii.* llenar B desde C, *iii.* vaciar A en C, *iv.* vaciar B en C, *v.* trasvasar el contenido de A a B (hasta llenar B), *vi.* trasvasar el contenido de B a A (hasta llenar A). Hacer un planteo de programación dinámica que permita resolver el problema con un mínimo número de operaciones.

Ejercicio 9 Máxima subsecuencia común: Dadas dos secuencias de números: $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, se desea encontrar una secuencia $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ de máxima longitud, que sea simultáneamente subsecuencia de A y de B. Plantear el problema por programación dinámica. ¿Cómo sería el planteo si los elementos de C debieran ser tomados consecutivos tanto en A como en B?

Ejercicio 10 TSP: Hacer un planteo por programación dinámica para resolver el problema del viajante (de optimización).

Ejercicio 11 Braquistocrona: Implementar un algoritmo de programación dinámica para resolver el problema de la braquistocrona (discretizado).