Práctica 7

1. Calcular

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(2\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta, \quad a^2<1$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}, \quad a>1$

2. Probar que

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

   b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

3. Calcular

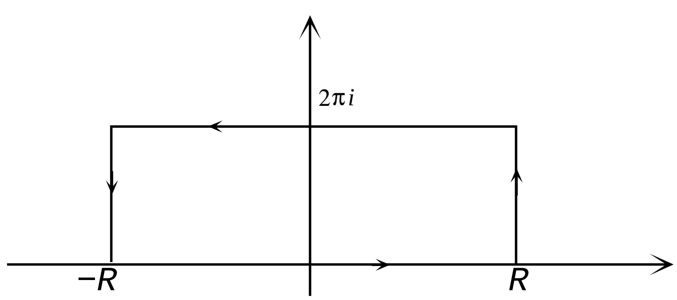
   a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x-1}{x^2}\,dx$

4. Calcular el valor principal de:

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3-4x^2+5x}$ **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2+4)(x-1)}dx$

5. Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\,dx$ considerando la función $\displaystyle\frac{1-e^{2iz}}{z^2}$ y aplicando el teorema de los residuos sobre un recinto apropiado.

6. Verificar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)}$, $0<a<1$, integrando la función $\displaystyle\frac{e^{az}}{1+e^z}$ en:



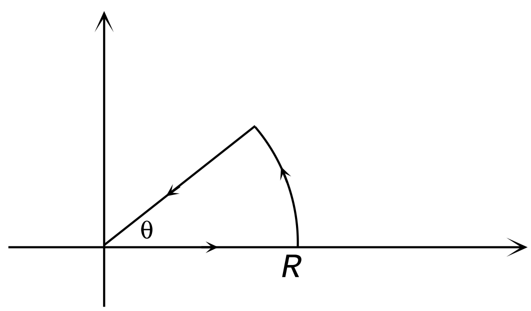
7. Sean: $I_1 = \displaystyle\int_0^\infty x^a \cos x \; dx$, $\quad I_2 = \displaystyle\int_0^\infty x^a \operatorname{sen} x \; dx$, $\quad -1 < a < 0$. Demostrar, integrando sobre un contorno adecuado la función $z^a e^{iz}$, que $I_1 = -I_2 \operatorname{tg}(\pi \frac{a}{2})$.

8. Usando que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \; dx = \sqrt{\pi}$, calcular

   a) las integrales de Fresnel

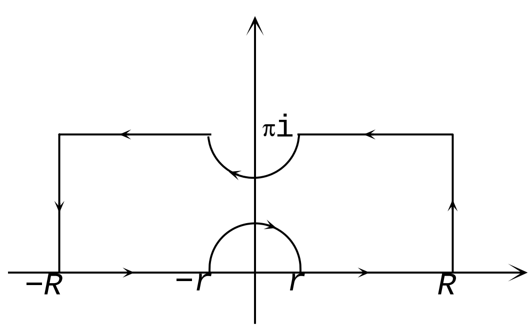
$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx \qquad\qquad \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)dx$$

   integrando la función e^{iz^2} en el recinto ($\theta = \frac{\pi}{4}$)



   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda\theta x) \; dx$, $\quad \lambda, \; \theta > 0$; integrando la función $e^{-\lambda z^2}$ sobre un rectángulo de lados $\pm R$ y $\pm R + i\theta$.

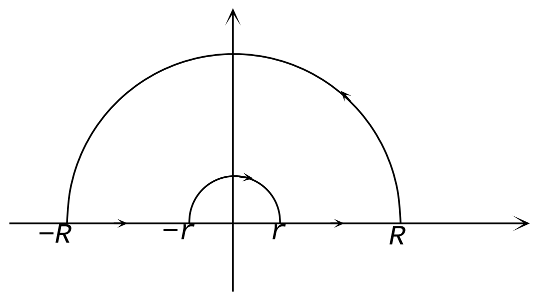
9. Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sh} x} \; dx$ integrando $\dfrac{e^{iz}}{\operatorname{sh} z}$ en el recinto:



10. **a)** Dado $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, calcular las integrales:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} \; dx \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2 + a^2} \; dx$$

   integrando (respectivamente) las funciones $\dfrac{\log z}{z^2 + a^2}$ y $\dfrac{(\log z)^2}{z^2 + a^2}$ sobre el contorno



b) Verificar que

i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\,dx = 0$ **ii)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$

11. Calcular
$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)(2+x)}\,dx$$

12. Probar que
$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$