Práctica 2.5 - Lógica proposicional
(ejercicios adicionales - opcionales)

Ejercicio 1. *Álgebra de Lindenbaum.* Probar que la *interdeducibilidad* es una relación de equivalencia sobre las fórmulas de la lógica proposicional: $\varphi \sim \psi$ sii $\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$, donde la conectiva $\leftrightarrow$ se interpreta de la manera evidente. Más aún, probar que esta relación es compatible con $\neg$, $\vee$, $\wedge$, en el siguiente sentido: si $\varphi, \psi, \eta \in \mathbf{Form}$, $\varphi \sim \psi$, entonces

$$\neg\varphi \sim \neg\psi,\ (\varphi \vee \eta) \sim (\psi \vee \eta),\ \text{y}\ (\varphi \wedge \eta) \sim (\psi \wedge \eta).$$

Por tanto, si llamamos $\mathcal{L}$ al cociente de **Form** por la relación de equivalencia $\sim$, se tienen en $\mathcal{L}$ operaciones bien definidas:

$$\neg[\varphi] = [\neg\varphi], [\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \vee \psi], [\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \wedge \psi].$$

Llamemos $1 \in \mathcal{L}$ a la clase de las tautologías y $0 \in \mathcal{L}$ a la clase de las contradicciones.

a. Si $p, q, r \in \mathcal{L}$, convencerse de la validez de las siguientes leyes:

Identidad:	$p \vee 0 = p$	$p \wedge 1 = p$,
Complementos:	$p \vee \neg p = 1$	$p \wedge \neg p = 0$,
Conmutatividad:	$p \vee q = q \vee p$	$p \wedge q = q \wedge p$,
Distributividad:	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,

Recíprocamente, estas leyes inducen axiomas correctos para el cálculo proposicional (esto puede hacerse de distintas maneras equivalentes, reflexionar). Los axiomas de SP pueden derivarse a partir de allí, mostrando que se trata de una axiomatización también completa. Como consecuencia, si ϕ es una fórmula en las variables $p, q, r, \ldots$ y los conectivos $\neg, \vee, \wedge$, se tiene que ϕ expresa una tautología si y solo si la identidad $\phi = 1$ puede derivarse a partir de las leyes anteriores.

b. Si definimos $[\varphi] \leq [\psi]$ por $\vdash (\varphi \to \psi)$, mostrar que $(\mathcal{L}, \leq)$ es un retículo (*lattice*), es decir: un conjunto parcialmente ordenado donde todo par de elementos p, q admite un supremo y un ínfimo; notar que éstos vienen dados por $p \vee q$ y $p \wedge q$, respectivamente. Además se trata de un retículo acotado (con máximo 1 y mínimo 0) y complementado: para cada $p \in \mathcal{L}$ existe $p' \in \mathcal{L}$ verificando $p \vee p' = 1$, $p \wedge p' = 0$; a saber, $p' = \neg p$. Cualquier retículo con estas propiedades que verifique además la ley distributiva de arriba se denomina un *álgebra de Boole.* Equivalentemente, un álgebra de Boole es una estructura $(\mathcal{A}, \neg, \vee, \wedge, 0, 1)$ que verifique todas las leyes del inciso anterior.

c. Dar operaciones naturales -y elementos distinguidos 0 y 1- en los siguientes conjuntos que los conviertan en álgebras de Boole: $\mathcal{P}(X)$, con X un conjunto fijo; $2 = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$; 2×2; $2^I = \{\text{funciones } f : I \to 2\}$. Un elemento p en un álgebra de Boole se dice un *átomo* si es no nulo y no admite elementos q con $0 < q < p$. Caracterizar los átomos de las álgebras anteriores.

d. El álgebra de Boole $\mathcal{L}$ se llama *álgebra de Lindenbaum de la lógica proposicional.* Probar que es numerable (asumiendo que tenemos numerables variables proposicionales $p_1, p_2, \ldots$) y que no tiene átomos. De hecho, es la única álgebra de Boole con estas dos propiedades (salvo isomorfismo, cf. inciso i).

e. Una ecuación booleana E es una igualdad entre dos fórmulas en las variables $p, q, r \ldots$ con los conectivos $\neg, \vee, \wedge$. Si E puede derivarse a partir de las leyes del inciso a, diremos que E es una *identidad booleana.* Si E vale para cualquier reemplazo de las variables por elementos de un álgebra de Boole $\mathcal{A}$, diremos simplemente que E *vale* en $\mathcal{A}$. Teniendo en cuenta las consideraciones del inciso a, probar que las siguientes nociones son equivalentes:

- E es una identidad booleana.
- E vale en toda álgebra de Boole $\mathcal{A}$
- E vale en el álgebra de Boole 2.

f. Un *homomorfismo* entre álgebras de Boole es una función que preserva las operaciones $\neg, \vee, \wedge$. Mostrar que dar una valuación $v : \mathbf{Form} \to \{0, 1\}$ equivale a dar un homomorfismo de $\mathcal{L}$ en 2. Sea X el conjunto de las valuaciones para la lógica proposicional, y tomemos $h : \mathcal{L} \to \mathcal{P}(X)$ dada por $h([\varphi]) = \{v \in X : v \models \varphi\}$. Probar que h está bien difinida y que es un monomorfismo de álgebras de Boole (homomorfismo inyectivo). En particular, $\mathcal{L}$ se puede representar como un álgebra de conjuntos, donde las operaciones son el complemento, la unión y la intersección de conjuntos; en verdad esto vale para todas las álgebras de Boole (teorema de representación de Stone).

g. (*) *Demostración topológica del teorema de compacidad*[1]. Evidentemente, un conjunto Γ de fórmulas es satisfacible si y sólo si

$$\bigcap_{\varphi \in \Gamma} h([\varphi]) \neq \emptyset,$$

donde h es la aplicación del inciso anterior. Observemos por otra parte que $h([\varphi]) \subset X \subset 2^{\mathbf{Form}}$. Si a 2 se le da la topología discreta, el conjunto $2^{\mathbf{Form}}$ con la topología producto se denomina *espacio de Cantor* (cuando **Form** es numerable), y es compacto por el teorema de Tychonoff. Probar que $h([\varphi])$ siempre es cerrado en $2^{\mathbf{Form}}$. Deducir el teorema de compacidad para la lógica proposicional.

h. (*) Recíprocamente, demostrar usando el teorema de compacidad el siguiente caso particular del teorema de Tychonoff: para cualquier conjunto I, el conjunto 2^I es compacto con la topología producto. (Asuma compacidad para un lenguaje con tantas variables proposicionales como necesite).

i. Un álgebra $\mathcal{A}$ se dice *libre* si admite un subconjunto $B \subset \mathcal{A}$ (una *base*) con la siguiente propiedad: para cada función $f : B \to \mathcal{H}$ de B en un álgebra de Boole $\mathcal{H}$, existe un único homomorfismo $h : \mathcal{A} \to \mathcal{H}$ que extiende a f. Probar que dos álgebras libres con bases de igual cardinalidad son isomorfas. El álgebra $\mathcal{L}$ es libre, ¿cuál es una base? Probar (*) que toda álgebra de Boole numerable y sin átomos es libre. Concluir la unicidad afirmada en el inciso d.

Ejercicio 2. Dar una prueba del Lema de König fundada[2] en el Teorema de Compacidad, y viceversa.

Ejercicio 3. Aplicaciones cotidianas del lema de König: Imagine vivir en un universo en el que todos son inmortales, excepto por la posibilidad de ser ejecutado. Alguna personas eligen jugar al siguiente juego (inventado por Raymond Smullyan), en el que lo que está en juego es la vida.
Hay una infinta cantidad de bolas, cada una numerada con un número natural positivo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ hay infinitas bolas numeradas con n. Hay también una caja con capacidad infinita, que comienza vacía. El primer día hay que poner una bola (con el número que uno elija) dentro de la caja. Cada día sucesivo hay que sacar una bola de la caja y reemplazarla por una cantidad finita a elección de bolas con números menores que el que tiene inscripto la bola seleccionada. Por ejemplo, si uno eligió sacar una bola con el número 518, puede reemplazarla por un millón de bolas con el número 517. Una bola marcada con un 1 no puede ser reemplazada por ninguna bola, una vez sacada. Uno pierde y es ejecutado si la caja queda vacía. Si uno elige jugar al juego, ¿está necesariamente condenado a muerte?
Sugerencia: Ponga las bolas en un árbol.

[1] Saltee este ítem y el próximo si no sabe lo que es una topología.
[2] Sin utilizar el axioma de elección.

Ejercicio 4. Sea G un grafo y sea k un entero positivo. Diremos que G es k-coloreable si existe una función que a cada vértice del grafo le asigna un entero entre 1 y k (representando el código de un color) de forma tal que dos vértices adyacentes nunca reciben el mismo color[1].

Para cada vértice $v \in G$ y para cada $i = 1, ..., k$ sea $p_{v,i}$ la proposición atómica que expresa que el vértice v tiene color i. Sea $C_k(G)$ el conjunto de proposiciones que contiene a:

$$p_{v,1} \vee ... \vee p_{v,k} \text{ para cada } v \in G,$$

$$\neg(p_{v,i} \wedge p_{v,j}) \text{ para cada vértice } v \in G \text{ y para } 1 \leq i < j \leq k \text{ y}$$

$$\neg(p_{u,i} \wedge p_{v,i}) \text{ para cada color } i \text{ y para cada par } u, v \text{ de vértices adyacentes.}$$

- Muestre que hay una correspondencia uno a uno entre k-coloreos de G y asignaciones de valores de verdad a las proposiciones atómicas definidas anteriormente que satisfacen $C_k(G)$.
- Deduzca que G es k-coloreable si y sólo si $C_k(G)$ es satisfacible.
- Muestre que G es k-coloreable si y sólo si todo subgrafo finito de G es k-coloreable.

Ejercicio 5. *Independencia de los axiomas de SP, lógicas trivalentes.* Consideremos la siguiente axiomatización usual del cálculo proposicional, provista de la regla de modus ponens:

$$\begin{array}{ll} \text{SP1}: & \vdash \varphi \to (\psi \to \varphi) \\ \text{SP2}: & \vdash (\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)) \\ \text{SP3}: & \vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi) \end{array}$$

Queremos ver que cada uno de estos esquemas de axioma es *independiente* de los demás, en el sentido de que no se puede conseguir a partir de los otros dos. (Para ser precisos, existe al menos una *instancia* de SP1 que no se obtiene por aplicaciones finitas de la regla de modus ponens a partir de instancias de SP2 y SP3; análogamente para SP2 y SP3).

a. Permitámonos considerar valuaciones de las fórmulas de la lógica proposicional que usen tres valores de verdad en lugar de sólo dos. Por ejemplo, consideremos valuaciones que asignen valores 0, 1 ó 2 a las variables proposicionales y que se extiendan a las demás fórmulas respetando las siguientes tablas:

A	$\neg A$
0	1
1	1
2	0

A	B	$A \to B$
0	0	0
1	0	2
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	2
1	2	0
2	2	0

Digamos que una fórmula es *bella* si toma el valor 0 en toda valuación. Observe que la belleza se hereda por modus ponens, y que todas las instancias de SP2 y SP3 son bellas. Muestre que $p \to (q \to p)$ no es bella; concluya la independencia del esquema-axioma SP1.

b. Pruebe la independencia de SP2 con un argumento similar.

c. Si al borrar todos los signos de negación ($\neg$) de una fórmula φ lo que se obtiene es una tautología, podemos decir que φ es *honesta*. Vea que la honestidad se preserva por modus ponens, y que SP1 y SP2 engendran fórmulas honestas. ¿Qué ocurre con SP3?

[1] Originalmente el problema estaba relacionado con el diseño de mapas, cada vértice representaba un país o una región y el problema era cuántos colores hacen falta para poder pintar el mapa sin que dos zonas adyacentes reciban el mismo color.