

# Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Primer Cuatrimestre 2012

## Práctica 8: Conjuntos Computables

1. En cada ejercicio, buscar una solución que utilice el teorema de Rice y otra que no lo utilice, cuando sea posible.
2. Probar que el conjunto  $\{x \in \mathbb{N} : \text{dominio de } \psi_x = \emptyset\}$  no es recursivo.
3. Probar que los siguientes conjuntos no son recursivos:
  - a)  $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y \in \text{rango de } \psi_x\}$ .
  - b)  $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \psi_x = \psi_y\}$ .
  - c)  $\{x \in \mathbb{N} : \text{rango de } \psi_x \text{ es infinito}\}$ .
4. Probar que todo conjunto recursivamente enumerable infinito contiene un subconjunto recursivo infinito.
5. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:
  - a) Si  $B$  es recursivamente enumerable, entonces  $B$  es recursivo o  $\mathbb{N} \setminus B$  es recursivo.
  - b) Si  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia numerable de conjuntos recursivamente enumerables, entonces  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  es recursivamente enumerable.
6. Probar que si  $B$  es recursivamente enumerable y  $f$  es una función parcialmente computable entonces  $f^{-1}(B)$  es recursivamente enumerable.
7. Probar que las siguientes funciones no son computables:
  - a)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_{x,x} = 2x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
  - b)  $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom } \Psi_x = \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_x = \Psi_y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$d) f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si imagen } \Psi_x \text{ es infinita} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$e) f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in \text{Dom } \Psi_x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

8. Decidir si los siguientes conjuntos son recursivamente enumerables:

$$a) \{x \in \mathbb{N} : \psi_x(0) \downarrow\}.$$

$$b) \{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x) \downarrow\}.$$

$$c) \{x \in \mathbb{N} : \text{dominio de } \psi_x = \emptyset\}.$$

9. Probar que  $B$  es recursivamente enumerable e infinito si y sólo si existe una función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  inyectiva y recursiva tal que el rango  $f$  es  $B$ .

10. Probar que  $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 \in \text{Dom } \psi_x\}$  es recursivamente enumerable, pero no es recursivo.

11. Probar que  $B = \{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x) \text{ se puede computar en menos de } x \text{ pasos}\}$  es recursivo.

12. Probar que  $B = \{x \in \mathbb{N} : \text{el programa con índice } x \text{ tiene menos de } x \text{ líneas}\}$  es recursivo.

13. El conjunto  $B = \{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x) = 0\}$  ¿es recursivo?

14. El conjunto  $B = \{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x) < x\}$  ¿es recursivo?