Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Primer Cuatrimestre 2012

Práctica 6: Funciones Recursivas Primitivas

1. Sean ψ y ϕ funciones numéricas totales de una y dos variables respectivamente. Analizar cuáles de las siguientes definiciones de f son definiciones por recursión primitiva.

   a) $f(x,0) = 17$.
   $f(x,y+1) = f(0,\phi(x,y))$.

   b) $f(x,0) = \psi(x)$.
   $f(x,y+1) = f(x,y) + \phi(y,x)$.

   c) $f(x,0) = \phi(0,x)$.
   $f(x,y+1) = \phi(f(x,y), y+1)$.

   Para cada una de las definiciones que representen una recursión primitiva, especificar las funciones g y h asociadas a partir de las cuales se obtiene f por recursión primitiva.

2. Probar que cada una de las siguientes funciones es primitiva recursiva.

   a) $max(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{si } x < y \end{cases}$

   b) $min(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases}$

   c) $par(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\ es\ par \\ 0 & \text{si } x\ es\ impar \end{cases}$

   d) $hf(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$.

   e) $sqrt(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

   f) $psq(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\ es\ un\ cuadrado\ perfecto \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

3. Sean ψ y ϕ funciones recursivas primitivas de una y dos variables, respectivamente. Mostrar que cada una de las funciones siguientes es también primitiva recursiva.

   a) La función f_1 de una variable, donde $f_1(0) = \psi(0) + 1$,
   $f_1(1) = \psi(\psi(1) + 1) + 1$, y en general:
   $f_1(x) = \psi(\psi(\ldots(\psi(x) + 1)\ldots) + 1) + 1$.
   donde la cantidad de veces que aparece ψ es $x + 1$.

   b) La función f_2 de dos variables, donde $f_2(x, 0) = \phi(x, 0)$, $f_2(x, 1) = \phi(\phi(x, 1), 0)$, y en general:
   $f_2(x, y) = \phi(\phi(\phi(\ldots\phi(\phi(x, y), y - 1)\ldots 2), 1), 0)$.

4. Usar las definiciones por sumas y/o productos acotados para establecer la recursividad primitiva de cada una de las funciones siguientes. Suponer que g es una función primitiva recursiva de una variable.

   a) $f(y) =$ el número de valores de i en el intervalo $0 \leq i \leq y$ para los cuales $g(i) > 3$.

   b) $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(i+1) > g(i) \text{ para todo } x \leq i \leq y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

   c) $f(w, x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \text{ y } w \text{ es el mayor entre } g(x), g(x+1), \ldots, g(y) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

5. Sea g una función recursiva primitiva de $n + 1$ variables, s, t funciones recursivas primitivas de 1 variable. Probar que las siguientes funciones son primitivas recursivas.

   a) $f_1(x_1, \ldots, x_n, y) = max_{0 \leq i \leq y}(g(x_1, \ldots, x_n, i))$.

   b) $f_2(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{cases} max_{s(y) \leq i \leq t(y)}(g(x_1, \ldots, x_n, i)) & \text{si } s(y) \leq t(y) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

6. Probar que las funciones dadas a continuación son primitivas recursivas. Pueden usarse como funciones auxiliares, las dadas en la clase teórica o las ya calculadas anteriormente.

   a) $shr(x, n) = \lfloor \frac{x}{2^n} \rfloor$.

   b) $lg(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \lfloor log_2(x) \rfloor + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$

c) $dig(x,n)$ = el n-ésimo dígito en la representación binaria de x , contando desde la derecha y comenzando con 0. Así, $dig(13,0) = 1, dig(13,1) = 0, dig(13,2) = 1, dig(13,3) = 1, dig(13,4) = 0$, etc.

d) $wgt(x)$ = el número de unos en la representación binaria de x.

7. Probar que las siguientes funciones son recursivas primitivas:

   a) $f(n)$ es el último dígito del desarrollo decimal de n.

   b) $f(n)$ es el primer dígito del desarrollo decimal de n.

8. Probar que las siguientes funciones son recursivas primitivas:

   a) $G(n,m)$ es la cantidad de números primos entre n y m.

   b) $G(n,m) = f^n(m)$, donde f es recursiva primitiva.

9. Determinar el número de Gödel del programa P, siendo P el programa

$$\begin{array}{ll} [A] & X_1 \leftarrow X_1 + 1 \\ \text{if} & X_1 \neq 0 \quad \text{go to } [A] \end{array}$$

10. ¿Qué programa P tiene número de Gödel 86399?.

11. Probar que la función de Fibonacci es primitiva recursiva. Esta función está definida por

$$\begin{array}{rcl} F(0) & = & 0 \\ F(1) & = & 1 \\ F(n+2) & = & F(n+1) + F(n) \end{array}$$

12. Probar que la siguiente función es primitiva recursiva.

$$\begin{array}{rcl} H(0) & = & 0 \\ H(n+1) & = & 1 + \prod_{i=1}^{n} H(i) \end{array}$$

13. De las funciones definidas en los últimos cuatro ejercicios de la práctica anterior. ¿Cuáles son primitivas recursivas?