Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Primer Cuatrimestre 2012

Práctica 4: Modelos y Árboles

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, con un símbolo de función binario f y con un símbolo de constante c. Para cada enunciado, encontrar una interpretación que lo satisfaga que tenga universo finito y la otra con universo infinito.

    a) $\forall x \forall y \left(f\left(x,x\right) = f\left(y,y\right) \rightarrow x = y\right)$.
    b) $\forall x \exists y \ x = f\left(y,y\right)$.
    c) $\forall x \ f\left(x,c\right) = c$.

2. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje del ejercicio anterior. Para cada interpretación, encontrar un enunciado que tenga como modelo a la interpretación dada pero que no sea universalmente válido.

    a) $U_I = \mathbb{R}, f_I\left(x,y\right) = x \cdot y, c_I = 1$.
    b) $U_I = \mathbb{C}, f_I\left(x,y\right) = Re\left(x\right) + Im\left(y\right) + i, c_I = i$.

3. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario

    a) Encontrar una fórmula α que sea válida en $(\mathbb{Z}, +)$ y no en $(\mathbb{N}, +)$.
    b) Encontrar una fórmula β que sea válida en $(\mathbb{Z}, \cdot)$ y no en $(\mathbb{Q}, \cdot)$.
    c) Encontrar una fórmula γ que sea válida en $(\mathbb{C}, \cdot)$ y no en $(\mathbb{R}, \cdot)$.

4. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función unario f. Sean α y β los siguientes enunciados de $\mathcal{L}$:

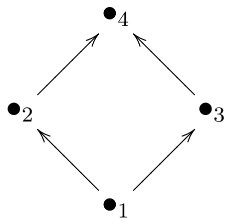
    $\alpha = \forall x \exists y \ f\left(y\right) = x$,

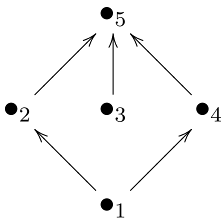
    $\beta = \forall x \forall y \left(f\left(x\right) = f\left(y\right) \rightarrow x = y\right)$

    Hallar dos interpretaciones $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ tales que $\mathcal{I}_1$ sea modelo de α y no de β e $\mathcal{I}_2$ sea modelo de β pero no de α.

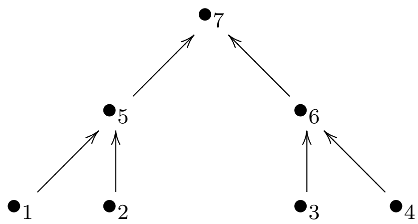
5. Dar un enunciado ϕ de primer orden en el lenguaje con un símbolo de predicado binario $\leq$ tal que sea válido en la primera de las siguientes interpretaciones, pero no en la segunda.

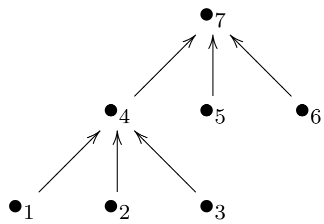
   a)

   b)

6. En el lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario $\leq$, buscar dos interpretaciones con un universo de 4 elementos tal que $\exists x \exists z \forall y \left(y \leq z \wedge (y \leq x \rightarrow x \leq y) \wedge (x \leq y \rightarrow (z \leq y \vee y \leq x))\right)$ sea válido en la primera interpretación, pero no en la segunda.

7. Decidir si las interpretaciones de los siguientes lenguajes son isomorfas, donde $\mathcal{L}$ es un lenguaje con igualdad, un símbolo de función binario:

   a) $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, +), \mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot)$.
   b) $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, <), \mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, >)$.
   c) $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, <), \mathcal{I}_2 = (\mathbb{Z}, <)$.
   d) $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, <), \mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \leq)$.

8. Decidir si las siguientes fórmulas son equivalentes:

   $\alpha = \forall x \exists y \left(P(x,y) \rightarrow P(y,x)\right)$ $\beta = \forall x \exists y \left(P(x,y) \rightarrow \exists z P(z,x)\right)$,

9. Probar que las siguientes fórmulas son universalmente válidas:

   a) $\exists y P(y) \rightarrow \forall x \exists y P(y)$.

b) $\exists y P(y) \rightarrow \exists y \exists x P(y)$.

c) $\forall x P(x) \rightarrow P(t)$, donde t es un término sin variables.

10. Introducir reglas de expansión de árboles para $\leftrightarrow$ y demostrar que las siguientes fórmulas son universalmente válidas:

    a) $\forall x \forall y\ \phi(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x\ \phi(x, y)$.

    b) $\exists x \exists y\ \phi(x, y) \leftrightarrow \exists x \exists y\ \phi(x, y)$.

11. Decidir usando árboles de refutación si $\Gamma \models \alpha$, siendo:

    a) $\Gamma = \{\forall x \exists y\ \phi(x, y)\}$ y $\alpha = \exists y \forall x\ \phi(x, y)$.

    b) $\Gamma = \{\exists y \forall x\ \phi(x, y)\}$ y $\alpha = \forall x \exists y\ \phi(x, y)$.

12. Analizar si α y β son equivalentes.

    a) $\alpha = \neg\forall x\ \phi(x)$ y $\beta = \exists x \neg\phi(x)$.

    b) $\alpha = \forall x\ \phi(x)$ y $\beta = \neg\exists x \neg\phi(x)$.

13. Decidir si las siguientes fórmula son universalmente válidas.

    a) $\forall x \exists y \forall z \exists w (P(x, y) \vee \neg P(w, z))$.

    b) $((\forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \wedge (\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))) \rightarrow \exists x (R(x) \wedge \neg Q(x))))$.

14. Probar que $\Gamma \models \alpha$, donde:

    a) $\Gamma = \{\forall x \forall y ((R(x, y) \wedge R(y, x)) \rightarrow (x = y)), \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))\}$ y $\alpha = \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow (x = y))$.

    b) $\Gamma = \{\forall x\ x \equiv x, \forall x \forall y (x \equiv y \rightarrow y \equiv x) \forall x \forall y \forall z ((x \equiv y \wedge y \equiv z) \rightarrow x \equiv z)\}$ y $\alpha = \forall x \forall y \forall z ((x \equiv y \wedge x \equiv z) \rightarrow y \equiv z)$.

15. Sea L un lenguaje con igualdad.

    a) Para cada valor de $n \geq 0$, escribir una fórmula que fuerce a que el modelo tenga al menos n elementos.

    b) Dar un conjunto de fórmulas Γ tal que si Γ es satisfactible en una interpretación $\mathcal{I}$, entonces el dominio de $\mathcal{I}$ es infinito.