

# Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Primer Cuatrimestre 2012

## Práctica 3: Cálculo de Predicados

1. Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario  $P$ , dos símbolos de función  $f_1, f_2$ , donde  $f_1$  es unario y  $f_2$  es binario, y un símbolo de constante  $c$ . Decidir cuáles de las siguientes expresiones del lenguaje  $\mathcal{L}$  son términos y cuáles son fórmulas, donde  $x, y$  denotan variables.

- a)  $\exists f_2(x) P(f_2(x))$ .      d)  $\forall c \exists x P(x, c)$   
 b)  $f_2(f_1(x), f_1(y))$ .      e)  $\exists x \exists y \exists x P(f_2(x, y), f_1(y))$ .  
 c)  $\forall x \exists c P(x, c)$ .      f)  $\exists x P(x, y) \forall y$ .

2. Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje con un símbolo de predicado binario  $P$ . En cada una de las siguientes fórmulas, encontrar las apariciones libres y ligadas de las variables de dichas fórmulas.

- a)  $\forall x \exists y P(x, x)$ .      c)  $\exists x (\exists y P(x, x) \wedge P(x, y))$ .  
 b)  $(\exists x P(y, y) \rightarrow \exists y P(y, z))$ .      d)  $\forall z (\forall x P(x, y) \vee P(x, z))$ .

3. Para cada uno de los siguientes lenguajes, en donde  $f$  es unario y  $g$  binario, decidir si son interpretaciones de dichos lenguajes los siguientes ejemplos

- a)  $\mathcal{C} = \emptyset, \mathcal{F} = \{f, g\}, \mathcal{P} = \{=\}, U_I = \mathbf{N}, f_I(n) = \sqrt{n}, g_I(n, m) = n + m$ .  
 b)  $\mathcal{C} = \{c\}, \mathcal{F} = \{f, g\}, \mathcal{P} = \{=\}, U_I = \mathbf{N}, f_I(n) = n^2, g_I(n, m) = n + m, c_I = 2$ .  
 c)  $\mathcal{C} = \{c, d\}, \mathcal{F} = \{f, g\}, \mathcal{P} = \{=\}, U_I = \mathbf{N}, c_I = d_I = 0$

$$f_I(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es primo} \\ 2 & \text{si } n \text{ no es primo} \end{cases}$$

$$g_I(n, n) = n^2 - n$$

4. En cada uno de los siguientes ejemplos, describir la propiedad que determinan los siguientes enunciados.

a)  $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \exists z ((Q(z) \wedge P(x, z)) \wedge P(z, y)))$ ,

donde  $P$  y  $Q$  son símbolos de predicados binario y unario respectivamente, el universo de la interpretación son los números reales,  $P_I = <$ ,  $Q_I(x)$  significa  $x$  es un número racional.

b)  $\forall x (Q(x) \rightarrow \exists y (R(y) \wedge P(y, x)))$ ,

donde  $P$  es un símbolo de predicado binario,  $Q$  y  $R$  son símbolos de predicados unarios, el universo de la interpretación es el conjunto de los días y las personas,  $P_I(x, y)$  significa  $x$  nace en el día  $y$ ,  $Q_I(x)$  significa  $x$  es un día, y  $R_I(x)$  significa  $x$  es un esclavo.

c)  $\forall x \forall y (Q(x) \wedge Q(y) \rightarrow P(f(x, y)))$ ,

donde  $Q$  y  $P$  son símbolos de predicados unarios,  $f$  es un símbolo de función binario, el universo de la interpretación son los números enteros,  $Q_I(x)$  significa  $x$  es par,  $P_I(x)$  significa  $x$  es impar, y  $f_I(x, y) = x + y$ .

5. Describir la propiedad que determinan los siguientes enunciados, en los cuales el universo de la interpretación es el conjunto de la gente, donde  $P$  es un símbolo de predicado binario, tal que  $P_I(x, y)$  significa  $x$  quiere a  $y$ .

a)  $\exists x \forall y P(x, y)$  b)  $\forall y \exists x P(x, y)$

c)  $\exists x \exists y (\forall z P(y, z) \rightarrow P(x, y))$  d)  $\exists x \forall y \neg P(x, y)$

6. Sea  $\mathcal{L}$  el lenguaje con igualdad que consiste de un símbolo de función binario  $f$  y una constantes  $c$ . Para cada una de las siguientes interpretaciones

■  $U_I = \mathbb{N}$ ,  $f_I(x, y) = x + y$ ,  $c_I = 1$

■  $U_I = \mathbb{N}$ ,  $f_I(x, y) = x \cdot y$ ,  $c_I = 0$

Escribir en el lenguaje castellano la propiedad que determinan los siguientes enunciados y analizar la veracidad o falsedad de los mismos.

a)  $\forall x \exists y (x = f(y, y) \vee x = f(f(y, y), c))$

b)  $\exists y \forall x (x = f(y, y) \vee x = f(f(y, y), c))$

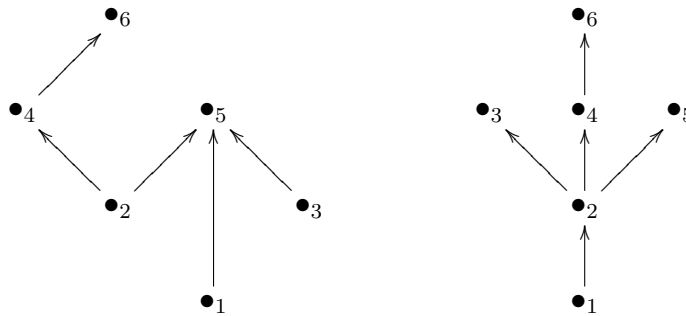
c)  $\forall x \forall y (f(x, y) = c \rightarrow (x = c \vee y = c))$ ,

7. Traducir las siguientes sentencias en enunciados:
- Ningún político es honesto.
  - No todas las aves pueden volar.
  - $x$  es trascendente si y sólo si  $x$  es irracional.
  - Ivanoff odia a todas las personas que no se odian a sí mismas.
  - Todos aman a alguien y ninguno ama a todos, o bien alguien ama a todos.
8. Usando como lenguaje el que contiene únicamente la igualdad, escribir enunciados que expresen:
- Existen al menos dos elementos.
  - Existen exactamente dos elementos.
  - Existen a lo sumo dos elementos.
- Agregando al lenguaje un símbolo de predicado unario  $P$ , escribir:
- - Existen a lo sumo dos elementos y al menos uno que cumplen la propiedad  $P$ .
  - Si existe un elemento que cumple la propiedad  $P$ , es único.
  - Existe un elemento que cumple la propiedad  $P$  y es único.
9. Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario, y sean  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$  las siguientes interpretaciones:
- $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, +)$ .
  - $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot)$ .
- donde  $\mathbb{N}$  denota el conjunto de los números naturales. Probar que 1 es un elemento distinguido en ambas interpretaciones.
10. Probar que si el universo de una interpretación es finito con  $n + 1$  elementos, y tiene la propiedad que  $n$  elementos del universo son distinguibles, entonces todos los elementos son distinguibles.
11. Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje de primer orden y con un símbolo de predicado binario  $\leq$  (reflexivo, antisimétrico y transitivo).

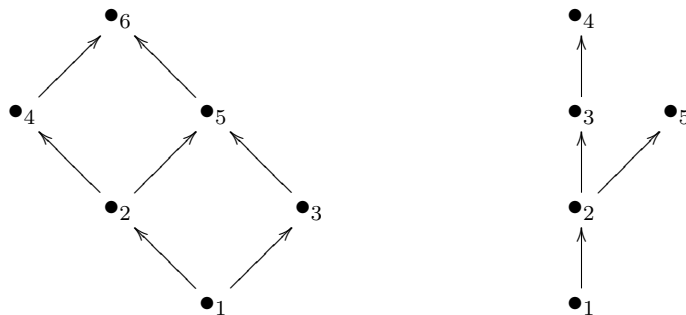
a) En cada una de las siguientes interpretaciones, buscar los elementos que verifican la fórmula

$$\alpha = \exists y \exists z ((y \leq x) \wedge \neg(x \leq y) \wedge (z \leq x) \wedge \neg(x \leq z) \wedge \neg((y \leq z) \vee (z \leq y)))$$

b) Para cada una de las siguientes interpretaciones, buscar una fórmula que se verifique sólo para 6



12. Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje de primer orden y con un símbolo de predicado binario  $\leq$  (reflexivo, antisimétrico y transitivo). Probar que todos los elementos del universo de la siguientes interpretaciones son distinguibles:



13. Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje de primer orden y con un símbolo de predicado binario  $\leq$  (reflexivo, antisimétrico y transitivo). ¿Cuántos subconjuntos definibles tiene el universo de la siguientes interpretaciones?

