PRÁCTICA 2 - ÁRBOLES DE REFUTACIÓN, SISTEMAS DEDUCTIVOS PARA LA LÓGICA PROPOSICIONAL Y APLICACIONES DE COMPACIDAD -

---

Ejercicio 1. Decidir si los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfacibles, y en tal caso encontrar todas las valuaciones que satisfacen a dichos conjuntos.

1. $\Gamma = \{((p_1 \to p_2) \to p_3), \neg p_2, (p_1 \vee p_3)\}$.
2. $\Gamma = \{((p_2 \to p_1) \to p_1), \neg p_1, (p_1 \wedge p_3), (p_3 \to p_1)\}$.

Comparar el método de las tablas de verdad y de los árboles.

Ejercicio 2. Decidir si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.

1. $(\neg (p_1 \vee p_2) \to ((p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \to p_3)))$.
2. $\neg ((p_1 \to p_3) \to ((p_2 \to p_3) \to ((p_1 \vee p_2) \to p_3)))$.
3. $((p_1 \vee p_2) \to (p_3 \to ((p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3))))$.
4. $((\neg\neg\neg (p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \to p_4)$.
5. $(((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_1)$.

Comparar el método de las tablas de verdad y de los árboles.

Ejercicio 3.

1. Sea Γ un conjunto satisfacible de fórmulas. Probar que si el conjunto de valuaciones que satisfacen a Γ es finito entonces Γ es infinito.
2. Probar que si k es un número natural, entonces existe un conjunto satisfacible Γ de fórmulas del cálculo proposicional tal que existen exactamente k valuaciones que satisfacen a Γ.

Ejercicio 4. Considerar la siguiente axiomatización SP para la lógica proposicional con lenguaje $\{\neg, \to\}$, en donde φ, ψ y θ son fórmulas proposicionales arbitrarias.

$$
\begin{array}{rl}
\text{SP1}: & \vdash \varphi \to (\psi \to \varphi) \\
\text{SP2}: & \vdash (\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)) \\
\text{SP3}: & \vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi) \\
\text{MP}: & \text{Si } \vdash \varphi \text{ y } \vdash \varphi \to \psi, \text{ entonces } \vdash \psi \quad \textit{(modus ponens)}
\end{array}
$$

Decimos que α es demostrable en SP a partir del conjunto Γ (notación $\Gamma \vdash \alpha$) si existe una secuencia finita $d_1, \ldots, d_n$ tal que $d_n = \alpha$ y para todo d_i

1. d_i es una instanciación de alguno de los axiomas de SP ó
2. $d_i \in \Gamma$ ó
3. Existen $j, k < i$ tal que d_i se obtiene de aplicar MP entre d_j y d_k.

Como es sabido SP es una axiomatización correta y completa para el cálculo proposicional. Hasta el Ejercicio 11, sin embargo, no deberá asumir dichas propiedades de SP. Sí puede usar, en cambio, que en SP vale el teorema de la deducción.

Demostrar que las siguientes afirmaciones son verdaderas

a. $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$

b. $\vdash (\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

Ejercicio 5.

a. Demostrar que SP3 es una tautología.
b. Demostrar que si las premisas de la regla MP son tautologías, el resultado es una tautología.
c. Suponiendo además que SP1 y SP2 también son tautologías, demostrar que SP es correcto.

Ejercicio 6. Sea Γ un conjunto de fórmulas del lenguaje $\{\neg, \rightarrow\}$. Demostrar que Γ es inconsistente (i.e. existe β tal que $\Gamma \vdash \beta$ y $\Gamma \vdash \neg\beta$) sii $\Gamma \vdash \alpha$ para todo α.

Ejercicio 7. Sea Γ un conjunto de fórmulas del lenguaje $\{\neg, \rightarrow\}$. Demostrar los siguientes puntos:

a. Si Γ es un conjunto maximal consistente, entonces $\Gamma \vdash \alpha$ sii $\alpha \in \Gamma$.

b. Γ es un conjunto maximal consistente sii sucede simulatáneamente:

1. Para toda α, o bien $\alpha \in \Gamma$ o bien $\neg\alpha \in \Gamma$.
2. Todos los axiomas de SP están en Γ.
3. Γ está cerrado por MP, es decir: si $(\alpha \rightarrow \beta) \in \Gamma$ y $\alpha \in \Gamma$ entonces $\beta \in \Gamma$.

c. Si Γ es maximal consistente y $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \in \Gamma$, entonces $\alpha \in \Gamma$ ó $\beta \in \Gamma$.

Ejercicio 8. Sea SP^+ una axiomatización correcta y completa del cálculo proposicional sobre el lenguaje con todos los conectivos usuales. Probar que si Γ es maximal consistente (respecto a SP^+) y $(\alpha \vee \beta) \in \Gamma$ entonces $\alpha \in \Gamma$ ó $\beta \in \Gamma$.

Ejercicio 9. El siguiente procedimiento fue diseñado por Lindenbaum para obtener un conjunto maximal consistente a partir de un conjunto consistente Γ.

1) Enumeramos las fórmulas de nuestro lenguaje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

2) Definimos la secuencia de conjuntos:

$$\begin{array}{lcl} \Gamma_0 & = & \Gamma \\ \Gamma_{n+1} & = & \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} & \text{si el conjunto es consistente} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\} & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \Gamma^+ & = & \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n \end{array}$$

Demostrar los siguientes puntos:

a. Cada Γ_i es consistente.
b. Exactamente una de las fórmulas α y $\neg\alpha$ está en Γ^+ para cada fórmula α.
c. Todos los teoremas están en Γ^+.
d. Γ^+ es un conjunto maximal consistente.

Ejercicio 10. Sea β una fórmula fija y Γ un conjunto consistente; mostrar que si $\Gamma \nvdash \beta$ y $\Gamma \nvdash \neg\beta$, entonces existen Γ_1 y Γ_2 maximales consistentes tales que $\mathbf{Con}(\Gamma) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_1)$, $\mathbf{Con}(\Gamma) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$, y $\Gamma_1 \vdash \beta$ y $\Gamma_2 \vdash \neg\beta$.

Ejercicio 11. Demostrar que las siguientes definiciones de compacidad son equivalentes:

1. Si $\Gamma \models \alpha$ entonces para algún subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0 \models \alpha$.

2. Si todo subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ es satisfacible, Γ es satisfacible.

3. Si Γ es insatisfacible, algún subconjunto finito de Γ es insatisfacible.

Ejercicio 12. Demostrar que si Γ es un conjunto maximal consistente entonces $\Gamma = \mathbf{Con}(\Gamma)$.

Ejercicio 13. Sea α una fórmula que no es una tautología, y sea Γ el conjunto de todas las instanciaciones de α (por instancia de α nos referimos a reemplazar uniformemente las variables proposicionales de α por fórmulas arbitrarias). Demostrar que Γ es inconsistente.

Ejercicio 14. Dados $\{\Gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que Γ_i es satisfacible y $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$. ¿Es $\Gamma^\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$ satisfacible?

Ejercicio 15. Sean Γ_1 y Γ_2 conjuntos satisfacibles de fórmulas tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible. Mostrar que existen fórmulas $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma_1)$, $\beta \in \mathbf{Con}(\Gamma_2)$ tales que $\alpha \to \neg\beta$ es una tautología. *Sugerencia*: usar el Teorema de Compacidad.

Ejercicio 16. Sea Γ un conjunto de contingencias tal que para todo par de fórmulas α, β se cumple que $\mathbf{Var}(\alpha) \cap \mathbf{Var}(\beta) = \emptyset$. Probar que Γ es satisfacible.

Ejercicio 17. Sea Γ un conjunto de fórmulas tal que cada valuación satisface al menos una fórmula de Γ. Probar que existe un número finito de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ tales que $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ es tautología.

Ejercicio 18. Sea Γ un conjunto de fórmulas que verifica la siguiente propiedad: si $\alpha, \beta \in \Gamma$, entonces $\alpha \to \beta$ es tautología ó $\beta \to \alpha$ es tautología. Probar que si $\Gamma \models \gamma$, entonces existe $\delta \in \Gamma$ tal que $\{\delta\} \models \gamma$.

Ejercicio 19. Sean Γ_1, Γ_2 satisfacibles, tal que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible. Mostrar que existe un α tal que $\Gamma_1 \models \alpha$ y $\Gamma_2 \models \neg\alpha$.

a. Demostrar *sin* usar nociones sintácticas (i.e. consistencia, demostración).
b. Demostrar usando el Teorema de Completitud.