Práctica 1 -Lógica proposicional-

Denotamos con **Form** al conjunto de todas las fórmulas del cálculo proposicional y con **Var** al conjunto de variables proposicionales. Para una fórmula $\alpha \in \textbf{Form}$, $\textbf{Var}(\alpha) \subset \textbf{Var}$ denota al subconjunto de variables proposicionales que aparecen en α.

Sintaxis

Ejercicio 1. Para cada una de las siguientes fórmulas encontrar todas las cadenas de formación minimales, sus árboles de formación y enumerar su conjunto de subfórmulas.

a. $((p_1 \vee (p_2 \to p_3)) \to p_4)$

b. $((p_1 \vee (p_5 \to p_2)) \to ((\neg p_1) \to (\neg p_2)))$

c. $(((\neg p_1) \vee p_5) \vee (p_1 \wedge (\neg p_2)))$

Ejercicio 2. Sea $\alpha \in \textbf{Form}$. Probar que si β es una subfórmula de α, entonces β aparece en toda cadena de formación de α.

Ejercicio 3.

a. Sea $\alpha \in \textbf{Form}$ tal que $\textbf{Var}(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ y sean $\beta_1, \ldots, \beta_n$ fórmulas arbitrarias. Definir inductivamente la noción de sustituir en las variables proposicionales $p_1, \ldots, p_n$ por $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Llamamos $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ a tal sustitución.

b. Sean $\alpha, \gamma \in \textbf{Form}$ tal que $\textbf{Var}(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Diremos que α y γ son *sintácticamente equivalentes* y lo notaremos $\alpha \sim \gamma$ si existen $q_1, \ldots, q_n \in \textbf{Var}$ tales que $q_i \neq q_j$ si $i \neq j$, y $\alpha(q_1, \ldots, q_n) = \gamma$.

1. Probar que es una relación de equivalencia en **Form**.

Notemos con $\overline{\alpha}$ a la clase de equivalencia de una fórmula α y con $\textbf{Form}/\!\sim$ al conjunto cociente[1].

2. Probar la buena definición[2] de la siguiente definición de *negación* en $\textbf{Form}/\!\sim$:

$$\neg\overline{\alpha} = \overline{\neg\alpha}.$$

3. Probar la buena definición de la siguiente noción de *complejidad* en $\textbf{Form}/\!\sim$:

$$comp(\overline{\alpha}) = comp(\alpha).$$

4. Mostrar con un ejemplo que, sin embargo, la disyunción no pasa bien al cociente (en otras palabras, mostrar que no está bien definir $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta} = \overline{\alpha \vee \beta}$ ya que puede ocurrir que pase $\overline{\alpha} = \overline{\gamma}$ sin que pase $\overline{\alpha \vee \beta} = \overline{\gamma \vee \beta}$ para algunos α, β y $\gamma \in \textbf{Form}$).

Ejercicio 4.

a. Sea $\alpha \in \textbf{Form}$, tal que $c(\alpha) > 0$. Probar que existe una subfórmula de α que tiene grado de complejidad 1.

b. Sean $k, n \in \mathbb{N}$ tales que $n > 2$ y $1 < k < n$. Si $\alpha \in \textbf{Form}$ es tal que $c(\alpha) = n$, ¿existe necesariamente una subfórmula de α con grado de complejidad k?

[1] En otras palabras, al conjunto de clases de equivalencia de fórmulas.

[2] Es decir, probar que si $(\alpha \sim \gamma)$ entonces $(\neg\alpha \sim \neg\gamma)$.

Semántica

Ejercicio 5. Sea $v : \mathbf{Form} \to \{0,1\}$ una valuación. Si sólo se conocen $v(p_1), v(p_2)$ y $v(p_3)$, siendo $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$, argumentar si es posible decidir $v \models \alpha$ o $v \not\models \alpha$ en los siguientes casos:

a. $\alpha = (\neg p_1 \wedge (\neg p_2 \wedge (\neg p_3 \vee p_4)))$.

b. $\alpha = ((p_5 \vee p_3) \to p_1)$.

c. $\alpha = ((p_1 \vee p_2) \to p_7)$.

d. $\alpha = (\neg p_5 \to \neg p_4) \to (p_4 \to p_5)$.

e. $\alpha = ((p_8 \to p_5) \to (p_8 \wedge \neg p_1))$.

f. $\alpha = \neg(p_6 \to p_6)$.

Ejercicio 6. Dadas las siguientes fórmulas del cálculo proposicional:

- $\alpha_1 = (\neg p_1 \to (p_3 \vee p_4))$.
- $\alpha_2 = \neg(p_2 \to (p_3 \wedge p_1))$.
- $\alpha_3 = ((\neg p_2 \to p_3) \to (p_2 \vee (p_5 \to p_3)))$.

Para cada $i = 1, 2, 3$, hallar todas las valuaciones v tales que:

a. $v \models \alpha_i$.

b. $v \models \alpha_i$ y $v(p_j) = 0$ si $p_j \notin \mathbf{Var}(\alpha)$.

Ejercicio 7. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$. Decimos que α es satisfacible cuando existe una valuación v tal que $v \models \alpha$. Demostrar que:

a. α es tautología si y solo si $\neg\alpha$ no es satisfacible.

b. $(\alpha \wedge \beta)$ es tautología si y sólo si α y β son tautologías.

c. $(\alpha \vee \beta)$ es contradicción si y sólo si α y β son contradicciones.

d. $(\alpha \to \beta)$ es contradicción si y sólo si α es tautología y β es contradicción.

Ejercicio 8. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$.

a. Probar que si $\alpha \wedge \beta$ es una contingencia, entonces α es contingencia o β es contingencia.

b. Probar que si α y β son contingencias y no tienen variables proposicionales en común, entonces $\alpha \wedge \beta$ es contingencia.

Ejercicio 9.

a. Dada una fórmula α y dos valuaciones v, v', probar que si $v(p_i) = v'(p_i)$ para toda $p_i \in \mathbf{Var}(\alpha)$ entonces $v \models \alpha$ si y sólo si $v' \models \alpha$.

b. Usando el resultado anterior, mostrar que si $\mathbf{Var}(\alpha) \cap \mathbf{Var}(\beta) = \emptyset$, entonces $(\alpha \to \beta)$ es tautología si y sólo si α es contradicción ó β es tautología.

Ejercicio 10. Dadas las siguientes tablas de verdad, construir proposiciones a las que éstas correspondan:

a)

p_1	p_2	p_3	α
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

b)

p_1	p_2	p_3	α
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Ejercicio 11. Construir las tablas de verdad correspondientes a las fórmulas:

a. El o exclusivo (XOR).

b. El y exclusivo ($XAND$).

c. $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))$.

d. $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((\neg p_2) \rightarrow (\neg p_1)))$.

Ejercicio 12. Se dice que un conjunto de conectivos es *adecuado* si con ellos se puede representar cualquier función booleana.

a. Demostrar que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ es un conjunto adecuado de operadores (sin suponer que otro conjunto es adecuado).

b. Probar, usando el resultado anterior, que también son adecuados $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \rightarrow\}$.

c. Demostrar que $\{\neg\}$, $\{\vee, \wedge\}$ y $\{\vee, \rightarrow\}$ no son adecuados.

Ejercicio 13. Dadas $\alpha, \beta \in$ **Form** puede escribirse $(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ como $\alpha|\beta$ (NAND, también llamado barra de *Sheffer*), y $(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ como $\alpha{\downarrow}\beta$ (NOR, también llamado barra de *Nicod*, flecha de *Peirce*, daga de *Quine* o cáliz de *Von Neumann*).

a. Construir las tablas de verdad de $\alpha|\beta$ y $\alpha{\downarrow}\beta$.

b. Mostrar que $\{|\}$ y $\{\downarrow\}$ son adecuados.

c. Probar que si $*$ es un conectivo binario adecuado, entonces $*$ es $|$ ó $\downarrow$.

Ejercicio 14. Sean $\top$ y $\bot$ dos conectivos de aridad cero (i.e., constantes booleanas), que cumplen $v \models \top$ y $v \not\models \bot$ para toda valuación v.

a. Probar que $\{\rightarrow, \bot\}$ es un conjunto adecuado de conectivos.

b. Probar que $\{\rightarrow, \top\}$ *no* es un conjunto adecuado de conectivos.

Ejercicio 15. Sea $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \neg\}$ y α una fórmula proposicional del lenguaje $\mathcal{L}$. Sea $\alpha^\star$ la fórmula que resulta de reemplazar en α: $\wedge \mapsto \vee$, $\vee \mapsto \wedge$ y para todo i, $p_i \mapsto \neg p_i$. Probar que para toda valuación v, $v \models \alpha^\star$ si y sólo si $v \not\models \alpha$.

Ejercicio 16. Dada una valuación v, sean p y q dos proposiciones tales que $v(p) = v(q)$. Demostrar que $v \models \varphi$ sii $v \models \varphi[p \mapsto q]$ para toda fórmula φ, donde $\varphi[p \mapsto q]$ denota la fórmula que resulta de reemplazar uniformemente la proposición p por q en φ.

Consecuencia

Ejercicio 17. Dado un conjunto de fórmulas Γ, llamamos $\mathbf{Con}(\Gamma)$ al conjunto de consecuencias semánticas de Γ definido como $\mathbf{Con}(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \models \varphi\}$. Sean $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ conjuntos de fórmulas. Probar que:

a. $\Gamma \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma)$.

b. si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces $\mathbf{Con}(\Gamma_1) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$.

c. si $\Gamma_1 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$ y $\Gamma_2 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_3)$ entonces $\Gamma_1 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_3)$.

d. $\mathbf{Con}(\mathbf{Con}(\Gamma)) = \mathbf{Con}(\Gamma)$.

Ejercicio 18. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$.

a. Probar que $\mathbf{Con}(\{\beta\}) \subseteq \mathbf{Con}(\{\alpha\})$ si y sólo si $\alpha \to \beta$ es tautología.

b. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

   1) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \wedge \beta)\}) = \mathbf{Con}(\{\alpha\}) \cap \mathbf{Con}(\{\beta\})$.
   2) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \vee \beta)\}) = \mathbf{Con}(\{\alpha\}) \cup \mathbf{Con}(\{\beta\})$.
   3) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \to \beta)\}) \subseteq \mathbf{Con}(\{\beta\})$.

Ejercicio 19. Sea $\Gamma \subseteq \mathbf{Form}$.

a. Probar que si Γ es satisfacible y $\Gamma' \subseteq \Gamma$, entonces Γ' es satisfacible. Mostrar que la recíproca no es cierta.

b. Probar que Γ es satisfacible si y sólo si $\mathbf{Con}(\Gamma)$ es satisfacible.

c. ¿Es cierto que para toda fórmula α sucede $\Gamma \models \alpha$ o $\Gamma \models \neg\alpha$?

Ejercicio 20. Demostrar que son equivalentes:

a. $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \in \mathbf{Con}(\emptyset)$.

b. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no son simultáneamente válidas para ninguna valuación.

c. Existe una fórmula β tal que $\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$.

d. $\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ para toda fórmula β.