Clase Práctica 1
- Inducción estructural, conectivos adecuados y consecuencia -
Viernes 23 de marzo de 2012

Definición 1. *Notaremos con* **Form** *al conjunto de todas las fórmulas del cálculo proposicional, con* **Var** *al conjunto de variables proposicionales y, para* $\alpha \in \mathbf{Form}$, *con* $\mathbf{Var}(\alpha)$ *al subconjunto de* **Var** *cuyos elementos son las variables proposicionales que aparecen en* α.

Ejercicio 1. Demostrar que si $\varphi \in \mathbf{Form}$ es tal que todas sus variables proposicionales aparecen una única vez, entonces φ es una contingencia.

Resolución. Demostraremos la propiedad por inducción en la complejidad de las fórmulas del cálculo proposicional. En general, para probar por inducción una propiedad P deberemos:

1. Probar que P vale para las variables proposicionales (las fórmulas más simples del cálculo proposicional)

2. Probar que si P vale para dos fórmulas $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$ entonces P vale para $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta$ y $\alpha \to \beta$.

Caso base: $\varphi = p$, siendo $p \in \mathbf{Var}$ una variable proposicional.
Sea v_1 la valuación tal que $v_1(q) = 0$ para toda variable proposicional $q \in \mathbf{Var}$. Luego,

$$v_1 \not\models \varphi \tag{1}$$

Sea v_2 la valuación tal que $v_2(q) = 1$ para toda variable proposicional $q \in \mathbf{Var}$. Luego,

$$v_2 \models \varphi \tag{2}$$

De (1) y (2) concluímos que si φ es una variable proposicional, entonces φ es una contingencia. Analicemos ahora las fórmulas más complejas.

Paso inductivo 1: $\varphi = \neg\alpha$.
Como φ es tal que sus variables proposicionales aparecen una única vez, lo mismo sucede con α. Por lo tanto, por hipótesis inductiva existen valuaciones v_1 y v_2 tales que $v_1 \not\models \alpha$ y $v_2 \models \alpha$. En consecuencia, $v_1 \models \varphi$ y $v_2 \not\models \varphi$. Luego φ es una contingencia.

Paso inductivo 2: $\varphi = \alpha \to \beta$.
Recordemos que $v \models \alpha \to \beta$ si y sólo si $v \not\models \alpha$ o $v \models \beta$. Nuevamente, como en φ cada variable proposicional aparece sólo una vez, lo mismo sucede en α y en β. Entonces, por hipótesis inductiva existe una valuación v tal que $v \not\models \alpha$. Por lo tanto,

$$v \models \alpha \to \beta \tag{3}$$

Usando nuevamente la hipótesis inductiva sabemos que existen valuaciones v_1 y v_2 tales que $v_1 \models \alpha$ y $v_2 \not\models \beta$. Teniendo en cuenta que $\mathbf{Var}(\alpha) \cap \mathbf{Var}(\beta) = \emptyset$, sea v_3 la valuación definida como

$$v_3(p) = \begin{cases} v_1(p) & \text{si } p \in \mathbf{Var}(\alpha) \\ v_2(p) & \text{si no} \end{cases}$$

Como $v_1 \models \alpha$ y $v_2 \not\models \beta$, resulta que $v_3 \models \alpha$ y $v_3 \not\models \beta$. Por lo tanto,

$$v_3 \not\models \alpha \to \beta \tag{4}$$

De (3) y (4) concluímos que φ es una contingencia.

Pasos 3 y 4. (Ejercicio: escriba los detalles de estos pasos) Si $\varphi = \alpha \wedge \beta$ o $\varphi = \alpha \vee \beta$ podemos, a partir de dos valuaciones tales que $v_1 \models \alpha$ y $v_2 \models \beta$ (resp. $v_3 \not\models \alpha$ y $v_4 \not\models \beta$), construir una nueva valuación v (resp. w) tal que $v \models \varphi$ (resp. $w \not\models \varphi$). Esto demuestra que φ es una contingencia también en estos casos.

Concluímos que, si φ es tal que todas sus variables proposicionales aparecen una única vez, entonces φ es una contingencia. $\square$

Definición 2. *Dada una fórmula del cálculo proposicional* $\alpha \in$ **Form** *cuyas variables proposicionales son* $\{p_1, \ldots, p_n\}$*, llamamos* **función booleana** *de* m *variables* ($m \geq n$) **inducida** *por* α *a la función* $f_\alpha^m : \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ *definida de la siguiente manera:*

$$f_\alpha^m(x_1, \ldots, x_m) = 1 \quad \textit{sii} \quad v_{x_1,\ldots,x_m} \models \alpha$$

donde $v_{x_1,\ldots,x_m}$ *es la valuación definida por:*

$$v_{x_1,\ldots,x_m}(p_i) = \begin{cases} x_i & \textit{si } 1 \leq i \leq m \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Decimos que un conjunto de conectivos es **adecuado** *si toda función booleana es inducida por alguna fórmula del cálculo proposicional que sólo usa dichos conectivos.*

Observación 1. *Los conjuntos de conectivos adecuados simplifican las demostraciones por inducción en la complejidad de las fórmulas. Como demostrarán al hacer la guia uno, el conjunto* $\{\neg, \to\}$ *es un conjunto de conectivos adecuado, con lo que, en realidad, el ejercicio uno de esta clase lo podemos considerar terminado sin hacer los pasos 2 y 3 de la resolución (pensar por qué).*

Ejercicio 2. *Demostrar que* $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *es un conjunto de conectivos adecuados.*

Demostración. Debemos ver que las fórmulas del cálculo proposicional construidas con $\{\neg, \wedge, \vee\}$ pueden codificar cualquier función booleana.
Sea f una función booleana de n variables. Partiremos la demostración en dos casos:

Caso 1. En este primer caso suponemos que la función f es tal que $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ para cualquier entrada.
Esta función es inducida por cualquier fórmula que sea una contradicción, en particular usaremos:

$$\alpha = p_1 \wedge \neg p_1$$

Observar que α está construida con conectivos en $\{\neg, \wedge, \vee\}$.
Probemos que efectivamente $f_\alpha^m(x_1, \ldots, x_n) = 0$ para cualquier entrada.

$$\begin{aligned} f_{p_1 \wedge \neg p_1}^m(x_1, \ldots, x_m) = 1 \quad &\text{sii} \quad v_{x_1,\ldots,x_m} \models p_1 \wedge \neg p_1 \\ &\text{sii} \quad v_{x_1,\ldots,x_m} \models p_1 \quad \text{y} \quad v_{x_1,\ldots,x_m} \not\models p_1 \end{aligned}$$

Observar que la última condición es imposible de satisfacer ya que representa una contradicción.
Por lo tanto $f_{p_1 \wedge \neg p_1}^m = f$.

Caso 2. Consideremos el conjunto $E_f = \{(e_1^1, \dots, e_m^1), \dots, (e_1^k, \dots, e_m^k)\} \subset \{0,1\}^m$ de puntos en los que f vale 1. Es decir:

$$f(x_1, ..., x_m) = 1 \quad \text{sii} \quad (x_1, ..., x_m) \in E_f.$$

Construiremos una colección $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ de fórmulas que serán sólo ciertas en valuaciones dadas por cada uno de estos k puntos respectivamente.
Para $i \in \{1, \dots, k\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$ definimos la fórmula del cálculo proposicional γ_j^i del siguiente modo:

$$\gamma_j^i = \begin{cases} p_j & \text{si } e_j^i = 1 \\ \neg p_j & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definimos ahora la fórmula β_i con $1 \leq i \leq k$ del siguiente modo:

$$\beta_i = \bigwedge_{j=1}^{m} \gamma_j^i$$

Observar que β_i únicamente usa los conectivos en $\neg$ y $\wedge$.
Veamos que β_i es satisfecha únicamente por valuaciones v tales que $v(p_j) = e_j^i$.

$$\begin{aligned} v \models \beta_i \quad & \text{sii} \quad v \models \bigwedge_{j=1}^{m} \gamma_j^i \\ & \text{sii} \quad \text{todas las siguientes afirmaciones valen} \begin{cases} v \models \gamma_1^i \\ \vdots \\ v \models \gamma_m^i \end{cases} \end{aligned}$$

Concluimos que, por construcción, $v \models \beta_i$ sii $v(p_j) = e_j^i$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$.
Como sabemos, f vale 1 en exactamente k puntos, y cada uno de ellos es capturado por la fórmula β_i. Para obtener una fórmula que induce f haremos la disyunción de todas las β_i.
Sea φ_f definida como:

$$\varphi_f = \bigvee_{i=1}^{k} \beta_i$$

Observar que φ_f usa conectivos en $\{\neg, \wedge, \vee\}$.
Veamos finalmente, que $f_{\varphi_f}^m = f$:

$$\begin{aligned} f_{\varphi_f}^m(x_1, \dots, x_m) = 1 \quad & \text{sii} \quad v_{x_1,\dots,x_m} \models \varphi_f \\ & \text{sii} \quad v_{x_1,\dots,x_m} \models \bigvee_{i=1}^{k} \beta_i \\ & \text{sii} \quad \text{alguna de las siguientes es cierta} \begin{cases} v_{x_1,\dots,x_m} \models \beta_1 \\ \vdots \\ v_{x_1,\dots,x_m} \models \beta_k \end{cases} \end{aligned}$$

Sin embargo, por lo que ya vimos antes, con $i \in \{x_1, \dots, x_m\}$ vale que:

$$v_{x_1,\dots,x_m} \models \beta_i \quad \text{sii} \quad (x_1, \dots, x_m) = (e_1^i, \dots, e_m^i).$$

Por lo tanto:

$$f_{\varphi_f}^m(x_1, \dots, x_m) = 1 \quad \text{sii} \quad \text{alguna de las siguientes es cierta} \begin{cases} (x_1, \dots, x_m) = (e_1^1, \dots, e_m^1) \\ \vdots \\ (x_1, \dots, x_m) = (e_1^k, \dots, e_m^k) \end{cases}$$

Pero esa es precisamente la caracterización que hicimos de f, por lo tanto $f = f_{\varphi_f}^m$. $\square$

Definición 3. *Dada una fórmula* $\alpha \in \mathbf{Form}$ *con* $\mathbf{Var}(\alpha) = \{p_1, ..., p_m\}$*, la fórmula* $f^m_{\varphi_f}$ *se llama la* **forma normal disyuntiva** *de* α*.*

Ejercicio 3. *Probar que* $\{\wedge\}$ *no es un conjunto de conectivos adecuado.*

Resolución. La resolución del ejercicio se reduce a la demostración de la siguiente afirmación: Afirmación 1: sólo con $\wedge$ no es posible inducir a la función boolena $\perp$.

Demo de la afirmación 1. Sea $\alpha \in \mathbf{Form}$ y tal que el único conectivo que figura en α es $\wedge$ y sea v la valuación definida por $v(p_i) = 1 \ \forall i \in \mathbb{N}$. La demostración se reduce ahora a la siguiente Afirmación 2: $v \models \alpha$.

Demo de la afirmación 2 por inducción estructural. Si $\alpha = p_i$ luego claramente $v \models \alpha$. Supongamos que $\alpha = \beta \wedge \gamma$. Luego, por hipótesis inductiva, $v \models \beta$ y $v \models \gamma$. Por lo tanto $v \models \alpha$ como queríamos demostrar. □

Luego α no induce $\perp$. □

Esto termina la resolución del ejercicio. □

Ejercicio 4. *1. Sea* $\alpha \in \mathbf{Form}$ *tal que* $\mathbf{Var}(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ *y sean* $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *fórmulas arbitrarias. Definir inductivamente la noción de sustituir en las variables proposicionales* $p_1, \ldots, p_n$ *por* $\beta_1, \ldots, \beta_n$*. Llamamos* $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *a tal sustitución.*

2. Sean $\alpha, \gamma \in \mathbf{Form}$ *tal que* $\mathbf{Var}(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$*. Diremos que* α *y* γ *son* sintácticamente equivalentes *y lo notaremos* $\alpha \sim \gamma$ *si existen* $q_1, \ldots, q_n \in \mathbf{Var}$ *tales que* $q_i \neq q_j$ *si* $i \neq j$*, y* $\alpha(q_1, \ldots, q_n) = \gamma$*.*

a. Probar que es una relación de equivalencia en **Form***.*

Notemos con $\overline{\alpha}$ *a la clase de equivalencia de una fórmula* α *y con* $\mathbf{Form}/\!\sim$ *al conjunto cociente*[1]*.*

b. Probar la buena definición[2] *de la siguiente definición de* negación *en* $\mathbf{Form}/\!\sim$ *:*

$$\neg\overline{\alpha} = \overline{\neg\alpha}.$$

c. Probar la buena definición de la siguiente noción de complejidad *en* $\mathbf{Form}/\!\sim$ *:*

$$comp(\overline{\alpha}) = comp(\alpha).$$

d. Mostrar con un ejemplo que, sin embargo, la disyunción no pasa bien al cociente (en otras palabras, mostrar que no está bien definir $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta} = \overline{\alpha \vee \beta}$ *ya que puede ocurrir que pase* $\overline{\alpha} = \overline{\gamma}$ *sin que pase* $\overline{\alpha \vee \beta} = \overline{\gamma \vee \beta}$ *para algunos* α, β *y* $\gamma \in \mathbf{Form}$*).*

Resolución. 1. La definición se basa en las siguientes reglas: para $1 \leq i \leq n$, $p_i(\beta_1, ..., \beta_n) := \beta_i$; $(\neg\alpha)(\beta_1, ..., \beta_n) := \neg(\alpha(\beta_1, ..., \beta_n))$ y $(\alpha \otimes \gamma)(\beta_1, ..., \beta_n) := \alpha(\beta_1, ..., \beta_n) \otimes \gamma(\beta_1, ..., \beta_n)$ para $\otimes \in \{\to, \vee, \wedge\}$.

2.a Es simétrica, reflexiva y transitiva (escribir los detalles).

2.b No depende del representante, pues el mismo reemplazo aplicado antes o despues de negar da el mismo resultado.

2.c Otra demo por inducción, queda como ejercicio.

2.d Un ejemplo es $\alpha = p_1, \beta = p_2$ y $\gamma = p_2$. Claramente $\overline{\alpha} = \overline{\gamma}$ pero $\overline{p_1 \vee p_2} = \overline{\alpha \vee \beta} \neq \overline{\gamma \vee \beta} = \overline{p_1}$. □

---

[1] En otras palabras, al conjunto de clases de equivalencia de fórmulas.

[2] Es decir, probar que si $(\alpha \sim \gamma)$ entoces $(\neg\alpha \sim \neg\gamma)$.

Definición 4. *Sea* $S \subset \textbf{Form}$ *y sea* $\alpha \in \textbf{Form}$. *Diremos que* α *es una* **consecuencia** *de* S, *y escribiremos* $S \models \alpha$, *en el caso que toda valuación* v *que satisface a* S *también satisface a* α. *Indicaremos con* $\textbf{Con}(S)$ *al conjunto de las consecuencias de* S: $\textbf{Con}(S) = \{\alpha \in \textbf{Form} \mid S \models \alpha\}$.

Observación 2. *Notaremos con* **Taut** *al conjunto de las tautologías. Observemos que si* $\tau \in \textbf{Taut}$ *es una tautología, entonces* $\textbf{Con}(\tau) = \textbf{Con}(\emptyset) = \textbf{Taut}$ *puesto que toda valuación satisface a una tautología (y también al conjunto vacío) y el conjunto de fórmulas que son satisfechas por cualquier valuación es, justamente,* **Taut**.
Por otra parte, $\neg\tau$ *es una contradicción y ninguna valuación la satisface. Por lo tanto* $\textbf{Con}(\neg\tau) = \textbf{Form}$ *ya que cualquier fórmual es satisfecha por* ninguna *valuación (pensarlo!).*

Ejercicio 5. Sean Γ_1, Γ_2 y Γ_3 conjuntos de fórmulas. Probar que si $\Gamma_1 \subseteq \textbf{Con}(\Gamma_2)$ y $\Gamma_2 \subseteq \textbf{Con}(\Gamma_3)$, entonces $\Gamma_1 \subseteq \textbf{Con}(\Gamma_3)$.

Resolución. Sea $\alpha \in \Gamma_1$. Queremos ver que $\alpha \in \textbf{Con}(\Gamma_3)$. O lo que es lo mismo, que si v es una valuación tal que $v \models \Gamma_3$, entonces $v \models \alpha$.

Como $\Gamma_2 \subseteq \textbf{Con}(\Gamma_3)$, $v \models \beta$ para toda fórmula $\beta \in \Gamma_2$. Por lo tanto, $v \models \Gamma_2$. Análogamente, como $\Gamma_1 \subseteq \textbf{Con}(\Gamma_2)$, $v \models \gamma$ para toda fórmula $\gamma \in \Gamma_1$. Finalmente, como $\alpha \in \Gamma_1$, $v \models \alpha$. Es decir, $\alpha \in \textbf{Con}(\Gamma_3)$. $\square$

Ejercicio 6. *Sean* $\alpha, \beta \in \textbf{Form}$. *Analizar la validez de las siguiente afirmación:*

- $\textbf{Con}(\{(\alpha \to \beta)\}) \subseteq \textbf{Con}(\{\beta\})$.

Resolución. La afirmación es verdadera. Observemos que si una valuación v satisface a β entonces también satisface a $\alpha \to \beta$. Por lo tanto $\{(\alpha \to \beta)\} \subset \textbf{Con}(\{\beta\})$. Luego, tomando $\Gamma_1 = \textbf{Con}(\{(\alpha \to \beta)\}), \Gamma_2 = \{(\alpha \to \beta)\}$ y $\Gamma_3 = \{\beta\}$ y usando el ejercicio anterior obtenemos que $\textbf{Con}(\{(\alpha \to \beta)\}) \subseteq \textbf{Con}(\{\beta\})$. $\square$