ESTADÍSTICA (Química)

PRÁCTICA 3 - Variables aleatorias continuas

1) La temperatura para la cual se produce cierta reacción química es una variable aleatoria X con función de densidad dada por:

$$f(x)=\begin{cases} c(1+x^2) & \text{si } -1\le x\le 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Halle c.
   b) Obtener la función de distribución acumulada F(x).
   c) Calcule la probabilidad de que la temperatura sea superior a 1.
   d) En un laboratorio se producen estas reacciones en forma independiente hasta lograr la primera reacción a temperatura superior a 1. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera reacción a temperatura superior a 1 se produzca en la quinta experiencia?

2) Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+x}{2} & \text{si } -1<x<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Calcule $P(0\le X<0.5)$.
   b) Calcule E(X) y V(X).

3) La función de distribución acumulada de una variable aleatoria X es:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ \dfrac{x-1}{3} & \text{si } 1\le x\le 4 \\ 1 & \text{si } x>4 \end{cases}$$

   a) Muestre que ésta es una función de distribución acumulada.
   b) Halle la función de densidad. ¿Qué nombre tiene la distribución de X?
   c) Halle x tal que $P(X>x) = 0.1$.

4) Sea $X \sim N(16, 25)$.
   a) Calcule utilizando la tabla:
      i) $P(X\ge 17)$
      ii) $P(X\le 14)$
      iii) $P(X<14)$
      iv) $P(13<X<20)$
      v) $P(10\le X<15)$
      vi) $P(X=16)$
   b) Encuentre un valor a de manera tal que:
      i) $P(X < a) = 0.75$
      ii) $P(X \ge a) = 0.6$
      iii) $P(|X - 16| < a) = 0.95$

5) Suponga que el tiempo de vida (en meses) de un componente electrónico en uso continuo, sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 0.1$.
   a) Halle la probabilidad de que el tiempo de vida sea mayor que 10 meses.
   b) Halle la probabilidad de que el tiempo de vida esté entre 5 y 15 meses.
   c) Halle t tal que la probabilidad de que el tiempo de vida sea mayor que t meses sea 0.01.

d) Calcule la probabilidad de que el tiempo de vida sea mayor que 25 meses sabiendo que superó los 15 meses. Compare los resultados de (a) y (d).

6) Sea $X \sim U(0, 40)$
   a) Halle la probabilidad de que X sea mayor que 10.
   b) Calcule la probabilidad de que X sea mayor que 25 sabiendo que $X > 15$. Compare con a).
   c) Compare el resultado de este ejercicio con el del ejercicio (5).

7) Si T es una variable exponencial y $P(T<1) = 0.05$, ¿cuánto vale el parámetro λ?

8) Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, muestre que

$$P\left(\frac{|X-\mu|}{\sigma} \leq 0.675\right) = 0.5.$$

9) El peso del cereal que contiene una caja sigue una distribución aproximadamente normal con una media de 600g. El proceso de llenado de cajas está diseñado para que sólo una caja de cada 100 quede fuera del intervalo 590-610g. ¿Cuánto tiene que valer la desviación estándar del peso de las cajas para alcanzar este requerimiento?

10) Se sabe que el peso promedio de un artículo que proviene de una línea de producción es de 83kg. Haga supuestos para poder responder las siguientes preguntas.
   a) Sabiendo que el 95% de los artículos pesan entre 81 y 85kg, calcule el desvío estándar del peso de un artículo elegido al azar de la línea de producción.
   b) Bajo los supuestos que hizo en (a), si elegimos 6 artículos al azar de la línea de producción, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 artículos pesen entre 82 y 84kg?

11) Suponga que la duración de un mecanismo electrónico (medida en miles de horas) es una variable aleatoria exponencial con parámetro 1 y que el costo de manufactura de uno de tales mecanismos es \$2. El fabricante los vende a \$5, pero garantiza la devolución del dinero si la duración del mismo es de 900h o menos.
   ¿Cuál es la ganancia esperada por cada mecanismo?

12) En cierta ciudad el límite diario permitido de descarga de sólidos al río es de 60mg/l. Un estudio de muestras de agua seleccionadas al azar señala que a lo largo de un prolongado período, la cantidad de sólidos descargados diariamente por cierta fábrica es una variable aleatoria X con distribución normal con media 48mg/l y varianza $36\text{mg}^2/\text{l}$, es decir $N(48, 36)$. Notar que la variabilidad día a día es grande.
   a) Calcule la probabilidad de que en un día elegido al azar la fábrica no cumpla con el límite establecido.
   b) Sea Y = número de días del mes (20 días hábiles) en los que la fábrica no cumple con el límite autorizado. Calcule la esperanza y la varianza de Y (suponga que la cantidad de sólidos descargados en un día es independiente de la cantidad de sólidos descargados en cualquier otro día y que la probabilidad de que la fábrica no cumpla con el límite establecido permanece constante a lo largo del tiempo)

13) La duración del motor de un auto (en miles de km. recorridos) fabricado por cierta compañía es una variable aleatoria continua *X* con función de densidad dada por

$$f_X(t)=\begin{cases} \dfrac{at}{100} & \text{si } 0 \le t \le 100 \\ a & \text{si } 100 < t \le 200 \\ -\dfrac{at}{100}+3a & \text{si } 200 < t \le 300 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determinar la constante a para que f_X. resulte una función de densidad, y graficar f_X.

b) Un auto se categoriza como defectuoso si su motor dura menos de 80.000 km. Hallar la probabilidad de que un auto producido por esta compañía resulte defectuoso.

c) Hallar la esperanza de la duración del motor del auto.

d) Como los autos defectuosos son cubiertos por una garantía de la compañía fabricante, para evitar sacar a la venta estos autos, la compañía implementa un plan de control de calidad. Este plan revisa los autos antes de sacarlos a la venta y los califica como aptos o no aptos. Si el auto revisado es defectuoso, lo declara como no apto con probabilidad 0.85. Sin embargo, el equipo de control de calidad también categoriza como no apto un auto que en realidad no es defectuoso con probabilidad 0.10. Los autos declarados no aptos son devueltos a la fábrica y los demás son puestos en venta.

   i. ¿Cuál es la probabilidad de que un auto defectuoso sea puesto en venta, es decir, declarado apto? ¿Cuál es la probabilidad de que un auto no defectuoso sea puesto en venta, es decir, declarado apto?

   ii. ¿Cuál es la probabilidad de que un auto sea puesto en venta?

   iii. Si un auto es puesto en venta, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

   iv. Un día se pusieron en venta 18 autos, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

   v. Se elige un auto al azar producido por la compañía. Considerar los siguientes eventos: D = {el auto es defectuoso} y N = {el auto se categoriza como no apto}
   ¿Son independientes D y N? Justificar.

14) (Optativo) Sea X ~ U(0, 1)

a) Halle la esperanza de ln(X).

b) Compárela con ln(E(X))

Sugerencia: recordar que $\int \ln(t)dt = t\ln(t)-t$.