Práctica 1: Espacios de Sobolev

1. Sea $f(x) = |x|$ para $x \in [0,1]$. Mostrar que $f \in W^{1,p}(0,1)$ para todo $p \in [1,\infty]$. Mostrar que la función de Heaviside no pertenece a ningún $W^{1,p}(0,1)$.

2. Sea $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\int \phi = a \neq 0$. Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definimos para cada $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int f(y)\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy$$

   (a) Mostrar que $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.
   (b) Si $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, calcular las derivadas débiles de orden $\leq k$ de f_ε ("derivando dentro de la integral").
   (c) Mostrar que si $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f_\varepsilon \to f$ en $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Concluir que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

3. Dado el intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$, probar el siguiente caso particular de la desigualdad de Sobolev: existe C tal que para toda $u \in W^{1,1}(a,b)$ se tiene

$$\|u\|_{L^\infty(a,b)} \leq C\|u\|_{W^{1,1}(a,b)}.$$

4. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $\Omega = [0,1]^2$. Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ entonces está bien definida su restricción a $\partial\Omega$, y que existe una constante C independiente de u tal que

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}^{1-\frac{1}{p}}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{\frac{1}{p}}.$$

5. Demuestre que si $u \in H_0^1(I)$, con $I = (a,b)$ entonces $u(a) = u(b) = 0$. Pruebe utilizando este hecho que para I acotado en $\mathbb{R}$ existe una constante C (dependiente de $|I|$) tal que

$$\|u\|_{L^2(a,b)} \leq C\|u'\|_{L^2(a,b)} \quad \forall u \in H_0^1(I) \qquad \text{Desigualdad de Poincaré}$$

   y por ende

$$\|u\|_{H^1(a,b)} \leq C\|u'\|_{L^2(a,b)} \quad \forall u \in H_0^1(I)$$

6. Demostrar la siguiente desigualdad de Poincaré:

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq C\|u'\|_{L^2(0,1)}, \quad \text{para toda } u \in H^1(0,1) \text{con } \int_0^1 u = 0.$$

7. Sea

$$u(x,y) = \frac{1}{\|(x,y)\|^\epsilon}$$

   con $0 < \epsilon < 1$ y $(x,y) \in B_R(0)$.

   (a) Probar que u tiene derivadas generalizadas de primer orden en $L^1(B_R(0))$; $u \in L^2(B_R(0))$ pero u no tiene representante continuo en $B_R(0)$.
   (b) Para qué valores de p resulta que $u \in W^{1,p}(B_R(0))$.

8. (a) Demuestre que la función $u(x,y) = |\ln(x^2+y^2)|^{\frac{1}{3}}$ está en $H^1(B_{\frac{1}{2}}(0))$.
   (b) Para qué valores de α la función $u(x,y) = |\ln(x^2+y^2))|^\alpha$ está en $H^1(B_{\frac{1}{2}}(0))$?.
   Concluir que las funciones de H^1 no son necesariamente acotadas y por ende el resultado del ej. 3 no se extiende a más dimensiones.

9. (*) Un dominio Ω es estrellado respecto a un punto $x \in \Omega$ si para cada $y \in \Omega$ el segmento $\overline{xy}$ está contenido en Ω. Mostrar que si Ω es estrellado respecto de un punto x, entonces $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $W^{k,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. ¿Qué ocurre para $p = \infty$? *Sugerencia.* Suponer que $x = 0$ y mostrar que las dilataciones $u_\rho(y) = u(\rho y)$, $0 < \rho < 1$, definidas para $y \in \Omega$, verifican $u_\rho \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$ si $\rho \to 1$. Ahora para cada ρ, hallar una sucesión aproximante $u_{\rho,\varepsilon}$ regular tal que $u_{\rho,\varepsilon} \to u_\rho$ si $\varepsilon \to 0$.