# Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
## Examen Final 12 de octubre de 2010

| Ej. 1 | Ej. 2 | Ej. 3 | Nota |
|---|---|---|---|
| | | | |

Nombre: L. U.: Carrera:

**Ejercicio 1.** (3.5 pts)

i) Dado el sistema $x = Bx + c$ con $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que el método iterativo $x^{k+1} = Bx^k + c$ converge, cualquiera sea el dato inicial, si y solo sí $\rho(B) < 1$.

ii) Para $a \neq 0$, considere el sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ a & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

a) Halle **todos** los valores de $a$ para los cuales el método de Jacobi aplicado al sistema es convergente.

b) Halle **todos** los valores de $a$ para los cuales el método de Gauss-Seidel aplicado al sistema es convergente.

c) Determine un valor de $a$ para el cual Jacobi sea convergente y Gauss-Seidel no, y otro valor de $a$ para el que Gauss-Seidel converja y Jacobi no lo haga.

**Ejercicio 2.** (3 pts)

i) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $C^2$ y supongamos que $f$ tiene una raiz simple en $\xi$. Escribir la sucesión que genera el método de Newton-Raphson. Interpretar el método geométricamente y deducir la expesión local del error.

ii) Sea $f(x) = (x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n)$ donde $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$. Probar que si $x_0 > c_n$ la sucesión de Newton-Raphson converge a $c_n$. ¿Con que orden lo hace?

**Ejercicio 3.** (3.5 pts)

Dada el problema de valores iniciales $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ con $f$ Lipschitz respecto de la segunda variable.

Sea $x_i = ih$ , $0 \leq i \leq N$ , $h = \frac{1}{N}$. Considere el el método de un paso

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i, h) \qquad y_0 = 1$$

con $\phi(x, y, h) = \frac{1}{3}f(x, y) + \frac{2}{3}f(x + \frac{3}{4}h, y + \frac{3}{4}hf(x, y))$

i) Demostrar que $\phi(x, y, h)$ es Lipschitz respecto de la segunda variable.

ii) Demostrar que

$$|y(x_i) - y_i| \leq \frac{\tau}{K}(e^{Kx_i} - 1) \qquad 0 \leq i \leq N$$

donde $K > 0$ es la constante de Lipschitz de $\phi$, $\tau = max|\tau_j|$ con $\tau_j$ el error de truncado local.

iii) Hallar $K$ para $f(x, y) = x\,cos^2(y)$