Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Examen Final 9 de noviembre de 2010

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Nota

Nombre: L. U.: Carrera:

Ejercicio 1. (3.5 pts) Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, inversible y $\|\cdot\|$ una norma.

i) Demostrar que
$$\frac{1}{Cond(A)} \leq \frac{\|A-B\|}{\|A\|}, \quad \forall B \in \mathbb{R}^{n\times n}, \text{singular}$$

ii) Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1/\epsilon & 1/\epsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Probar que $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} Cond(A) = +\infty$ y $\lim\limits_{\epsilon\to +\infty} Cond(A) = +\infty$ donde la $Cond(A)$ está tomada con la **norma infinito**.

b) Si tomamos la $Cond(A)$ con la **norma uno,** ¿se mantiene el mismo resultado?.

Ejercicio 2. (3.5 pts) Dada la función $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ y $n+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ en el intevalo $[0,1]$.

a) Probar que existe un único polinomio P_n, de grado menor o igual que n, que interpola a f en $x_0, x_1, \cdots, x_n$.

b) Demuestre que para cualquier $x \in [0,1]$ se tiene que:
$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!} w(x) \qquad \text{con } \theta \in [0,1]$$
y concluya que:
$$|f(x) - P_n(x)| \leq (n+2)\|w\|_\infty$$
donde $\|w\|_\infty = \max_{0\leq x\leq 1} \prod_{j=0}^{n} |x - x_j|$

c) ¿Cómo elegiría $x_0, x_1, \cdots, x_n$ de manera que $\|w\|_\infty$ sea mínima?.

d) Para la elección de puntos de c) estime en cuántos de esos puntos bastaría interpolar para tener error $< 10^{-3}$ al aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$ cualquiera sea $x \in [0,1]$.

Ejercicio 3. (3 pts) Considerar la ecuación diferencial
$$y'(x) = f(x, y(x))$$

a) Dado que
$$y_{n+1} - y_{n-1} = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx$$
hallar el método que resulta de aproximar la integral interpolando f en x_{n-1}, x_n, x_{n+1} (equiespaciados) por un polinomio de grado 2.

b) Demostrar la convergencia del método propuesto en a) y hallar su orden.

Justifique todas sus respuestas.