Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Primer Cuatrimestre - 2012

Práctica 3: Sistemas Lineales

Algunos Resultados Algebraicos

1. Probar que una matriz es nilpotente si y sólo si todos sus autovalores son nulos.

2. Sean $A, B : I \to \mathrm{R}^{n\times n}$ diferenciables. Probar que

   a) $\frac{d}{dt}A(t)B(t) = \dot{A}(t)B(t) + A(t)\dot{B}(t)$.

   b) Si $\det(A(t)) \neq 0$ entonces $\frac{d}{dt}A(t)^{-1} = -A(t)^{-1}\dot{A}(t)A(t)^{-1}$.

   c) $\frac{d}{dt}(\det A(t)) = \sum \det(a_1(t), \ldots, \dot{a_j}(t), \ldots, a_n(t))$, donde $a_j(t)$ representa la columna j de $A(t)$.

3. Mostrar que para toda matriz A de $n \times n$ se tiene que

$$\det(Id + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \ \mathrm{tr}(A) + o(\varepsilon).$$

Sistemas con Coeficiente Constantes

4. *a*) Hallar la solución general de cada uno de los siguientes sistemas. En II., IV. y V. resolver además el problema de valores iniciales.

   I) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$

   II) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y & x(0) = 2 \\ \dot{y} = x + 2y & y(0) = -1 \end{cases}$

   III) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$

   IV) $\begin{cases} \dot{x} = -2y & x(0) = \sqrt{3} \\ \dot{y} = x + 2y & y(0) = 1 \end{cases}$

   V) $\begin{cases} \dot{x} = x + y & x(0) = \sqrt{3} \\ \dot{y} = -x + y & y(0) = 1 \end{cases}$

   b) ¿Cuáles son las soluciones $(x(t), y(t))$ que verifican

$$\lim_{t\to+\infty} \| (x(t), y(t)) \| = 0?$$

   ¿Cuáles verifican

$$\lim_{t\to+\infty} \| (x(t), y(t)) \| = \infty?$$

   c) Esbozar los diagramas de fases.

5. Sea A una matriz de 2×2 con autovalores reales λ y μ asociados respectivamente a los autovectores $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Esbozar el diagrama de fases de $x' = Ax$ si

a) $0 < \lambda < \mu$

b) $\lambda < 0 < \mu$

c) $\lambda = 0, \mu < 0$

d) $\lambda < \mu < 0$

6. *a*) Graficar el diagrama de fases de un sistema bidimensional

$$x' = Ax \quad A \in \mathrm{R}^{2\times 2}$$

y encontrar la solución general, en los siguientes casos:

i) A tiene autovalores reales de distinto signo.

ii) A tiene dos autovalores reales negativos (A es diagonalizable).

iii) A tiene un autovalor negativo pero no es diagonalizable.

iv) A tiene autovalores complejos conjugados $a \pm bi$ con $a < 0$.

v) Idem (IV) con $a = 0$.

vi) Idem (IV) con $a > 0$.

vii) Idem (II) con autovalores positivos.

viii) Idem (III) con autovalor positivo.

b) ¿En cuáles de los items anteriores se verifica $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ con cualquier condición inicial? ¿En cuáles se verifica $\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = \infty$?

7. *a*) Resolver la ecuación diferencial $x' = Ax$ en R^3 en los siguientes casos:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

iii) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$x(0) = (1, 2, 1)$

iv) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x(0) = (2, 1, 1)$

b) Analizar el comportamiento asintótico de las soluciones.

Definición: Una matriz $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ se dice *semisimple* si es diagonalizable en $\mathbb{C}$.

8. Sea $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ y supongamos que todos los autovalores de A tienen parte real no positiva.

a) Si A es semisimple, probar que toda solución de $x' = Ax$ se mantiene acotada cuando $t \to +\infty$.

b) ¿Qué sucede si A no es semisimple?

9. Sea $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ con n par y supongamos que todas las soluciones de $x' = Ax$ son periódicas del mismo período. Entonces A es semisimple y el polinomio característico es una potencia de $t^2 + a^2$ con $a \in \mathrm{R}$.

10. Utilice el método de variación de las constantes para hallar la solución general del sistema
$$x' = Ax + b(t) \tag{1}$$
donde $b : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$ es continua.

11. Resuelva el sistema no homogéneo (1) con
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$
y condición inicial $x(0) = (1, 0)$.

12. Encontrar todas las soluciones de:
$$\begin{cases} x' = y + \exp(2t) \\ y' = -4x + 4y + 1 \end{cases}.$$

13. Encontrar la solución de
$$\begin{cases} x' = x + 3y + t \\ y' = -y - \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$
   a) que verifique $x(1) = 2 \quad y(1) = 7$
   b) que verifique $x(1) = 0 \quad y(1) = 0$

14. Sea A una matriz de $n \times n$ de números reales o complejos.
   a) Probar que
$$\lim_{n\to\infty} \left(Id + \frac{A}{n} \right)^n = e^A.$$
   b) Probar que $\det\left(e^A\right) = e^{\operatorname{tr}(A)}$.

Estabilidad

15. Halle los subespacios estables, inestables y centrales (E^s, E^u y E^c) del sistema lineal
$$x' = Ax \tag{2}$$
para las siguientes matrices:

   a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

   d) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   e) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

En cada caso, también esboce el diagrama de fases. ¿Cuáles de estas matrices define un flujo hiperbólico, e^{At}?

16. Sea $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ y sea $x(t)$ la solución de (2) con $x(0) = x_0$. Muestre que

    a) si $x_0 \in E^s - \{0\}$ entonces $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ y $\lim_{t\to-\infty} |x(t)| = \infty$;

    b) si $x_0 \in E^u - \{0\}$ entonces $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$ y $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$;

    c) si $x_0 \in E^c - \{0\}$ y A es semisimple, entonces existen constantes positivas m y M tales que, para todo $t \in \mathrm{R}$, $m \leq |x(t)| \leq M$.

17. Muestre que las únicas rectas invariantes para el sistema lineal (2) con $x \in \mathrm{R}^2$ son las líneas $ax + by = 0$ donde $v = (-b, a)$ es un autovector de A.

Sistemas No Autónomos

18. Pruebe el siguiente Teorema:

    Sea $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ y sea $B(t) \in \mathrm{R}^{n\times n}$ continua para $t \geq t_0$.

    Probar que si todos los autovalores de A tienen parte real negativa y que si $\|B(t)\| \to 0$ $(t \to +\infty)$, entonces las soluciones de
$$x' = Ax + B(t)x \tag{3}$$
    verifican $x(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$ (y luego, 0 es asintóticamente estable).

19. Determine la estabilidad de $x = 0$ para el sistema (3) si
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t^2} & 0 & 0 \\ te^{-t^2} & t^2e^{-t^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t^2} \end{pmatrix}.$$

20. Para qué valores de a es la solución $x = 0$ asintóticamente estable o inestable (ignore los casos con autovalores de parte real cero) para el siguiente sistema
$$x' = A(t)x$$
    donde
$$A(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{t^2+1}{t^2} & e^{-t} \\ \frac{\sin t}{t^{3/2}} & 0 & 1 + e^{-t} \\ (2-a)\frac{1-t}{t} & -1 & a\frac{1-t}{t} \end{pmatrix}.$$

21. **Fórmula de Liouville.** Sea $\varphi(t)$ una matriz cuyas columnas son las soluciones del sistema
$$x' = A(t)x, \tag{4}$$
    donde $A(t) = (a_{ij}(t))$ es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos son funciones continuas en un intervalo I. Probar que para todo $t \in I$ y $t_0 \in I$ fijo
$$\det(\varphi(t)) = \det(\varphi(t_0))\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds}.$$

22. Sea $A(t)$ diferenciable y antisimétrica en un intervalo I y $\varphi(t)$ una matriz cuya columnas son las soluciones del sistema (4). Probar que $\varphi(t)^T\varphi(t) = C$, donde $\varphi(t)^T$ es la transpuesta de $\varphi(t)$. Concluir que, si $\varphi(t_0)$ es ortogonal para algún $t_0 \in I$, entonces $\varphi(t)$ es ortogonal para todo $t \in I$.