Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Primer Cuatrimestre - 2012

Práctica 1: Resolución de Ecuaciones de Primer Orden

1. **Separación de Variables.** Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, encontrar la solución general y la particular que satisfaga la condición dada:

   a) $y' = \dfrac{1+y}{1+x}$, $y(0) = 1$,

   b) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(1) = 0$,

   c) $y' = (1+x)(1+y)$, $y(0) = 1$,

   d) $y' - 2xy = x$, $y(1) = 0$,

   e) $(1+x^2)y' + e^{-y} = 0$, $y(0) = 0$,

   f) $y' - y^{1/3} = 0$, $y(0) = 0$.

   En todo los casos de el dominio de definición de la solución.

2. Comprobar que la sustitución $v = ax + by + c$ transforma la ecuación

   $$y' = f(ax + by + c)$$

   en otra de variables separadas. Aplicar este método para resolver

   a) $y' = (x+y)^2$,

   b) $y' = \operatorname{sen}^2(x - y - 1)$.

3. **Ecuaciones homogéneas**. Resolver las ecuaciones siguientes:

   a) $x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0$,

   b) $x \operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right) y' = y \operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right) + x$,

   c) $xy' = y + 2xe^{\frac{-y}{x}}$,

   d) $2xyy' = 4x^2 + 3y^2$,

   e) $xy' = y + (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$,

   f) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$.

4. Dada la ecuación

   $$y' = F\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right).$$

   a) Si $ae \neq bd$, encontrar constantes h, k tales que el cambio de variables $x = z - h$, $y = w - k$ transforma la ecuación anterior en otra homogénea.

   b) Si $ae = bd$, encontrar un cambio de variables que reduzca la ecuación anterior a una de variables separadas.

   c) Aplicar el método anterior en los ejemplos siguientes:

I) $y' = \dfrac{x+y+4}{x-y-6}$, II) $y' = \dfrac{x+y+4}{x+y-6}$, III) $y' = \dfrac{2x+3y-1}{4x+4}$.

5. Utilizar el cambio de variables $y = zx^r$, $r \in \mathrm{R}$, para resolver

   a) $y' = \dfrac{2+3xy^2}{4x^2y}$, b) $y' = \dfrac{y-xy^2}{x+x^2y}$.

6. **Ecuaciones exactas.**

   a) $(6xy - y^3)dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)dy = 0$,
   b) $4x - y + (6y - x)y' = 0$,
   c) $(2xy^2 + 3x^2)dx + (2x^2y + 4y^3)dy = 0$,
   d) $(1 + ye^{xy}) + (2y + xe^{xy})y' = 0$,
   e) $(e^x \operatorname{sen} y + \tan y)dx + (e^x \cos y + x \sec^2 y)dy = 0$.

7. **Factor integrante**. Resolver las siguientes ecuaciones, encontrando un factor integrante:

   a) $(4x + 3y^3)dx + 3xy^2dy = 0$,
   b) $(7x^4y - 3y^8) + (2x^5 - 9xy^7)y' = 0$, (sugerencia hallar un factor integrante de la forma x^ny^m),
   c) $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0$, sabiendo que admite un factor integrante que solo depende de $x + y^2$.

8. a) Dada la ecuación
   $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{1}$$
   Demostrar que si
   $$\frac{N_x - M_y}{M}$$
   es una función que solo depende de la variable y, entonces
   $$\rho(y) = \exp\left(\int \frac{N_x - M_y}{M} dy\right)$$
   es un factor integrante para (1).

   b) Resolver

   I) $y^2 \cos x + (y + 5y \operatorname{sen} x)y' = 0$,
   II) $2x\ dx + x^2 \cot y\ dy = 0$,

9. Comprobar que la ecuación diferencial
$$\left(y + xf\left(x^2+y^2\right)\right)dx + \left(yf\left(x^2+y^2\right) - x\right)dy = 0$$
en general no es exacta, pero admite un factor integrante de la forma $\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

10. Probar que la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ admite un factor integrante de la forma $\mu(x^2+y^2)$ si
$$\frac{M_y - N_x}{xN - yM}$$
depende solamente de x^2+y^2.

11. **Ecuaciones lineales de primer orden.** Resolver las siguientes ecuaciones

    a) $y' + y = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$,
    b) $xy' = 2y - x^3$,
    c) $(1+x^2)y' + 2xy = \dfrac{1}{\tan x}$.

12. Encontrar una solución de la ecuación
$$y' \operatorname{sen}(2x) = 2y + 2\cos(x),$$
que permanezca acotada cuando $x \to \frac{\pi}{2}$.

13. Resolver las siguientes **ecuaciones de tipo Bernoulli**:

    a) $xy' + y = x^4y^3$,
    b) $xy^2y' + y^3 = x\cos(x)$,
    c) $xy' + y = xy^2$.

14. *a*) Demostrar que las ecuaciónes del tipo
$$y' + P(x)y = Q(x)y\ln y$$
se resuelven mediante la sustitución $z = \ln y$.
    b) Resolver $xy' = 2x^2y + y\ln y$.

15. La ecuación
$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x) \tag{2}$$
es conocida como la **ecuación de Ricatti**.

a) Mostrar que si y_1 e y_2 son 2 soluciones de la ecucion (2), entonces la $z = y_1 - y_2$ es solución de la ecuación de Bernoulli

$$z' + (P + 2y_2Q)z + Qz^2 = 0.$$

b) Sabiendo que $y = x$ es una solución de la ecuación de Ricatti

$$y' + x^3y - x^2y^2 = 1$$

determinar las demás soluciones.

16. *a*) Mostrar que si y_1 e y_2 son dos soluciones de (2), entonces su solución general está dada por

$$y - y_1 = c(y - y_2)\exp\left(\int Q(y_2 - y_1)\right).$$

b) Obtener la solución general de

$$y' - y\tan x - y^2\cos x = -\frac{1}{\cos x}$$

sabiendo que $y_1 = \dfrac{1}{\cos x}$ e $y_2 = -\dfrac{1}{\cos x}$ son soluciones.

Algunas Aplicaciones

17. El siguiente problema describe una deducción muy precisa de la edad del uranio.

a) Denotemos con $N_{238}(t)$ y $N_{235}(t)$ el número de átomos de U^{238} y U^{235} en tiempo t en una muestra de uranio, y tomamos como $t = 0$ el instante en que esta muestra fue creada. Por la ley de decaimiento radiactivo

$$\begin{aligned} N'_{238}(t) &= \frac{-\ln 2}{(4{,}5)10^9}N_{238}(t), \\ N'_{235}(t) &= \frac{-\ln 2}{(0{,}707)10^9}N_{235}(t). \end{aligned}$$

Resuelva estas ecuaciones para evaluar $N_{238}(t)$ y $N_{235}(t)$ en términos de los datos iniciales $N_{238}(0)$ y $N_{235}(0)$.

b) En 2010 la relación de U^{238} y U^{235} en una muestra era de 137,8. Suponiendo que, en el momento de la creación de una muestra, aparecieron iguales cantidades de U^{238} y U^{235}, demuestre que la edad del uranio es de $5{,}96 \times 10^9$ años.

18. La propagación de una acción en una población grande (por ejemplo, comprar un automóvil llamativo) a veces depende sólo parcialmente de la tendencia humana

de imitar lo que los otros hacen. En este caso el incremento de la proporción $y(t)$ de población que ha realizado tal acción puede expresarse por la fórmula

$$y' = (1 - y)(s(t) + Iy),$$

donde $s(t)$ mide el estímulo externo e I es una constante llamada coeficiente de imitación. Hallar y ($y \not\equiv 1$) cuando el estimulo externo crece uniformemente con el tiempo, de modo que $s(t) = at$ para una constante positiva a.

19. Fat Richie, un matón obeso del bajo mundo que pesaba 181 kilos, fue arrojado por la ventana de un departamento a 850 metos de altura sobre el suelo en la ciudad de Nueva York. Sin tomar en cuenta la resistencia del aire, calcular

    a) la velocidad con la que Fat Richie llegó al piso;

    b) el tiempo transcurrido antes del choque con el suelo.