Ecuaciones Diferenciales – 1° cuatrimestre 2012
Espacios de Sobolev

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sean $u,\ v \in W^{k,p}(\Omega),\ |\alpha| \le k$. Entonces
   (a) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ y $D^\beta\left(D^\alpha u\right) = D^\alpha\left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta}u$ para todo par de multiíndices α, β tales que $|\alpha| + |\beta| \le k$.
   (b) Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ y $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.
   (c) Si $V \subset \Omega$, entonces $u \in W^{k,p}(V)$.
   (d) Si $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$ y
   $$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\alpha \zeta D^{\alpha-\beta} u.$$
   (e) $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.
2. Probar que en cada clase de $W^{k,p}(\Omega)$ existe a lo sumo una función continua.
3. (a) Probar que si $u \in W^{1,p}((a,b))$, $1 \le p < \infty$ entonces $u \in AC[a,b]$.
   (b) Probar que si $u \in W^{1,p}((a,b))$, $p > 1$, entonces
   $$|u(x) - u(y)| \le \left(\int_a^b |u'|^p dt\right)^{1/p} |x-y|^{1-\frac{1}{p}}.$$
4. Sea $f \in H^1(\mathbb{R})$, probar que $h^{-1}(\tau_h f - f)$ converge a f' en $L^2(\mathbb{R})$ cuando $h \to 0$, donde $\tau_h f(x) = f(x+h)$.
   Hint: escribir $h^{-1}(\tau_h f - f)$ como $f' * \varphi_h$.
5. (a) Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H^1((a,b))$ $|f(x)| \le C\|f\|_{H^1((a,b))}$
   (b) Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H_0^1((a,b))$ $|f(x)| \le C\|f'\|_{L^2((a,b))}$.
   (c) Concluir que $\|f'\|_{L^2((a,b))}$ es una norma equivalente a $\|f\|_{H^1((a,b))}$ en $H_0^1((a,b))$.
   (d) Mostrar que (a) es falso en $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$.
   (e) Usando el teorema de Arzelá-Ascoli, probar que un conjunto acotado de $H^1((a,b))$ es precompacto en $C([a,b])$, y por lo tanto en $L^2((a,b))$.
6. Sea $f \in L^2((a,b))$. Probar que $f \in H^1((a,b))$ si y sólo si $\sum_k k^2|\hat{f}(k)|^2 < \infty$, donde $\hat{f}(k)$ son los coeficientes del desarrollo de f en series de Fourier.
7. Sea $f \in H^1((a,b))$ y $\{(a_j, b_j)\}_{j\in J}$ una colección de intervalos disjuntos en (a,b), probar que
   $$\sum_{j\in J} |f(b_j) - f(a_j)| \le \|f\|_{H^1} \left(\sum_{j\in J} |b_j - a_j|\right)^{1/2}.$$
   Concluir que $VA[a,b] \subset H^1((a,b))$.
8. Sea $u \in W^{k,p}(\Omega),\ 1 \le p < \infty$. Definimos $u^\varepsilon \equiv \eta_\varepsilon * u$ en Ω_ε (dónde η es el nucleo regularizante, η_ε las aproximaciones de la identidad y $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega /\ \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$). Entonces
   (a) $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$.
   (b) $u^\varepsilon \to u$ en $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ cuando $\varepsilon \to 0$.

9. Probar que si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ entonces

$$\int_\Omega |Du|^2 dx \leq C \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\Delta u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

(Hint: Mirar la práctica de funciones armónicas) Concluir que en $H_0^2(\Omega)$, $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ es una norma equivalente a la usual.

10. Supongamos que Ω es conexo y que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ satisface $\nabla u = 0$ a.e. en Ω. Probar que u es constante en Ω.

11. Sea Ω un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^n$ con borde C^1. Probar que existe una constante $C > 0$ que depende sólo de n y Ω tal que

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

para cada $u \in H^1(\Omega)$, donde

$$(u)_\Omega = ⨍_\Omega u\, dx.$$

12. Sea $\alpha > 0$. Probar que existe una constante $C > 0$ que depende sólo de α y de la dimensión del espacio, tal que

$$\int_\Omega u^2\, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx,$$

para toda $u \in H^1(\Omega)$ tal que $|\{x \in \Omega;\ u(x) = 0\}| \geq \alpha$.

13. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1 con F' acotada. Supongamos que Ω es acotado y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para $1 < p < \infty$. Probar que

$$F(u) \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad F(u)_{x_i} = F'(u) u_{x_i} \ (i = 1, \dots, n).$$

14. Sea $1 < p < \infty$ y Ω acotado.

    (a) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$.

    (b) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $u^+, u^- \in W^{1,p}(\Omega)$ y

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{a.e. en } \{u > 0\} \\ 0 & \text{a.e. en } \{u \leq 0\}, \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{a.e. en } \{u \geq 0\} \\ -\nabla u & \text{a.e. en } \{u < 0\}. \end{cases}$$

    (Sugerencia: $u^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u)$ para

$$F_\varepsilon(z) = \begin{cases} (z^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0.) \end{cases}$$

    (c) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$\nabla u = 0 \text{ a.e. en } \{u = 0\}.$$