Ecuaciones Diferenciales – 1° cuatrimestre 2012

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

1. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} u_t + \mathrm{div}_x(u) = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = f(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

2. Resolver

$$\begin{cases} \mathrm{div}(u) = e^{-\sum_{i-1}^n x_i} & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{x_1=0} = x_2 \end{cases}$$

3. Resolver

$$\begin{cases} x \cdot \nabla u = |x|^2, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{x_1=1} = 3x_n. \end{cases}$$

   Estudiar el dominio de definición de la solución.

4. Mostrar, por consideraciones geométricas, que la solución general de

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

   es $u(x,y) = f(xy)$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$.

   Encontrar la solución cuyo gráfico contiene a la recta de ecuación $y = x$.

   ¿Qué pasa con el problema de valores iniciales cuando estos se dan sobre la curva $y = 1/x$?

5. Probar que no existe solución de la ecuación

$$u_x + u_y = u$$

   que satisfaga las condiciones iniciales $u = 1$ en la recta $y = x$.

6. Probar que la solución de la ecuación

$$u_x + u_y = u^2$$

   cuyo gráfico contiene a la recta $x = -y = u$ no está definida sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.

7. Sea $u(x,t)$ la solución clásica del problema

$$\begin{cases} u_t + f(x,t)u_x = \psi(x,t), \\ u|_{t=0} = u_0(x). \end{cases}$$

   Ver que sobre las trayectorias $(x(t),t)$, u se expresa como

$$u(x(t),t) = u_0(x(0)) + \int_0^t \psi(x(\xi),\xi)d\xi.$$

8. Hallar la solución de la ecuación

$$(x^2+y^2)u_x + 2xyu_y = (x+y)u$$

   que satisface $u(0,y) = y$.

9. Dado

$$Lu \equiv x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} - 3u,$$

   resolver:

(a) $\begin{cases} Lu &= 0, \\ u(x,y,0) &= xy. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} Lu &= 0, \\ u(x,y,0) &= f(x,y), \end{cases}$

imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad a f.

10. Usar el principio de Duhamel para resolver el problema

$$\begin{cases} c_t + vc_x = f(x,t) & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ c(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hallar una fórmula explícita cuando $f(x,y) = e^{-t} \sin x$.

Recordar que el método de Duhamel consiste en hallar $w(x,t;s)$ que verifique

$$\begin{cases} w_t + vw_x = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > s \\ w(x,s;s) = f(x,s) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

y luego encontrar u como

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t;s)\, ds.$$

11. Considerar el siguiente problema ($a > 0$):

$$\begin{cases} u_t + au_x = f(x,t) & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < L. \end{cases}$$

Probar la siguiente estimación de estabilidad

$$\int_0^L u^2(x,t)\, dx \leq \int_0^L e^{t-s} \int_0^L f^2(x,s)\, dx\, ds.$$

Sugerencia: Multiplicar la ecuación por u, usar que $a > 0$ y la desigualdad $2fu \leq f^2 + u^2$ para obtener

$$\frac{d}{dt} \int_0^L u^2(x,t)\, dx \leq \int_0^L f^2(x,t)\, dx + \int_0^L u^2(x,t)\, dx$$

A partir de ahí, usar que $E' - E = (Ee^{-t})'e^t$.