

## Ecuaciones Diferenciales - 1º cuatrimestre 2012

### ECUACIÓN DE LAPLACE Y POISSON

1. Probar que la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0$$

es invariante por rotaciones; esto es, si  $O$  es una matriz ortogonal y definimos  $v(x) = u(Ox)$ , entonces

$$\Delta v = 0.$$

2. Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre  $u$  necesarias para su validez.

(a) *Combinaciones lineales*: Si  $u_1$  y  $u_2$  son funciones armónicas, entonces  $\alpha u_1 + \beta u_2$  es armónica.

(b) *Homotecias*: Si  $u$  es armónica, entonces  $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$  es armónica.

(c) *Traslaciones*: Si  $u$  es armónica, entonces  $u(x - \xi)$  es armónica.

(d) *Diferenciación respecto a parámetros*: Si  $u(x, \gamma)$  es armónica para cada  $\gamma$ , entonces  $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x, \gamma)$  es armónica para cada  $\gamma$ .

(e) *Integración respecto a parámetros*: Si  $u(x, \gamma)$  es armónica para cada  $\gamma$ , entonces  $\int_a^b u(x, \gamma) d\gamma$  es armónica.

(f) *Diferenciación respecto a  $x$* : Si  $u$  es armónica, entonces  $D^\alpha u$  es armónica para todo multiíndice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

(g) *Convoluciones*: Si  $u$  es armónica, entonces  $\int u(x - \xi)\varphi(\xi)d\xi$  es armónica.

3. Sea  $u$  armónica en  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , abierto simplemente conexo. Probar que entonces existe  $v$  armónica en  $\Omega$  tal que  $u + iv$  es holomorfa.

4. Decimos que  $v \in C^2(\Omega)$  es subarmónica si  $\Delta v \geq 0$  en  $\Omega$ .

(a) Probar que si  $v \in C(\overline{\Omega})$  entonces  $\max_{\overline{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v$ .

Sugerencia: Probarlo primero suponiendo que  $v$  satisface que  $\Delta v > 0$  y luego probarlo para  $v_\varepsilon(x) := v(x) + \varepsilon|x|^2$  y hacer  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

(b) Probar que si  $x_0 \in \Omega$  y  $r < d(x_0, \partial\Omega)$ , entonces

$$v(x_0) \leq \int_{B(x_0, r)} v(\xi) d\xi$$

(c) Probar que  $v$  verifica el principio fuerte del máximo.

(d) Sea  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa y regular. Si  $u$  es armónica y  $v = \phi(u)$ , entonces  $v$  es subarmónica.

(e) Probar que  $v = |\nabla u|^2$  es subarmónica, si  $u$  es armónica.

5. Sea  $u$  una solución regular de

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } B_1(0) \\ u = g & \text{en } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Probar que existe una constante  $C$ , que depende sólo de la dimensión del espacio, tal que

$$\max_{B_1(0)} |u| \leq C \left( \max_{\partial B_1(0)} |g| + \max_{B_1(0)} |f| \right).$$

¿Es cierta la conclusión del ejercicio si cambiamos  $B_1(0)$  por  $\Omega$  un dominio acotado cualquiera?

6. Notemos por  $B_1^+$  a la semiesfera  $\{x \in \mathbb{R}^n / |x| < 1, x_1 > 0\}$ . Sea  $u \in C(\overline{B_1^+})$ , armónica en  $B_1^+$  con  $u = 0$  en  $\partial B_1^+ \cap \{x_1 = 0\}$  y notamos  $x = (x_1, x')$  con  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Definimos

$$U(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x_1 \geq 0, \\ -u(-x_1, x') & \text{si } x_1 < 0, \end{cases}$$

para  $x \in B_1(0)$ . Probar que  $U$  es armónica en  $B_1(0)$ . Concluir que  $u$  es  $C^\infty$  hasta  $\{x_1 = 0\}$ .

7. (a) Sea  $u$  una función armónica en  $B_1(0)$ . Probar que

$$\sup_{B_{1/2}(0)} |\nabla u(x)| \leq C \sup_{B_1(0)} |u(x)|,$$

donde  $C$  depende sólo de la dimensión del espacio.

- (b) Sea  $u$  armónica en  $\Omega$  y sea  $\Omega' \subset \subset \Omega$ . Probar que entonces se tiene

$$\sup_{\Omega'} |\nabla u| \leq C \sup_{\Omega} |u|,$$

donde  $C$  es una constante positiva que sólo depende de la dimensión del espacio y de  $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ .

- (c) Deducir de (a) que si  $u$  es armónica en  $B_R(0)$ , entonces

$$\sup_{B_{R/2}(0)} |\nabla u(x)| \leq \frac{C}{R} \sup_{B_R(0)} |u(x)|,$$

donde  $C$  es la constante de (a).

- (d) Concluir que si  $u$  es armónica en  $\mathbb{R}^n$  y acotada, entonces  $u$  es constante.

8. Probar que existe a lo sumo una solución acotada del problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}_+^n, \\ u = g & \text{en } \partial\mathbb{R}_+^n. \end{cases}$$

¿Vale la unicidad si eliminamos la hipótesis de que  $u$  sea acotada?

9. Sea  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de funciones armónicas en  $\Omega$  que converge uniformemente sobre los compactos de  $\Omega$  a una función  $u$ . Probar que  $u$  es armónica.
10. Sea  $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  ( $\Omega$  acotado), la solución del siguiente problema,

$$\begin{cases} \Delta u_n = 0 & \text{en } \Omega \\ u_n = g_n & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Probar que si  $g_n \rightarrow g$  uniformemente en  $\partial\Omega$ , entonces existe  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  tal que  $u_n \rightarrow u$  uniformemente en  $\Omega$  y  $\Delta u = 0$  en  $\Omega$ .

11. *Teorema de Harnack de convergencia monótona.*

Sea  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión monótona de funciones armónicas en un dominio  $\Omega$ , entonces la sucesión converge en todo punto o diverge en todo punto. En el primer caso, la convergencia es uniforme sobre compactos y el límite es una función armónica.

12. Probar que si  $u$  es armónica en  $\mathbb{R}^n$  y  $|u(x)| \leq C(1 + |x|^k)$ , entonces  $u$  es un polinomio de grado a lo sumo  $k$ .
13. Probar que si el problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene una solución en  $\Omega$  acotado ( $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ) entonces

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\partial\Omega} g(x) dS.$$

Relacionar con el ejercicio 10 de la práctica 1.

14. Sea  $\Omega$  un dominio con borde regular. Probar que si  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  es solución de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces  $u$  es constante.

15. Una función  $u \in C(\Omega)$  se dice subarmónica (superarmónica) en  $\Omega$  si para cada bola  $B \subset\subset \Omega$  y para cada función  $h$  armónica en  $B$  que satisface  $u \leq h$  ( $u \geq h$ ) en  $\partial B$ , se tiene que  $u \leq h$  ( $u \geq h$ ) en  $B$ .

- (a) Mostrar que si  $u \in C^2(\Omega)$ ,  $u$  es subarmónica (según esta definición) si y sólo si  $\Delta u \geq 0$ .  
 (b) Si  $u$  es subarmónica en  $\Omega$ , entonces satisface el principio fuerte del máximo; y si  $v$  es superarmónica en  $\Omega$  acotado, con  $v \geq u$  en  $\partial\Omega$ , entonces  $v > u$  en  $\Omega$  o  $v \equiv u$ .  
 (c) Sea  $u$  subarmónica en  $\Omega$  y  $B \subset\subset \Omega$ . Notamos con  $\tilde{u}$  la función armónica en  $B$  (dada por la integral de Poisson) que satisface  $\tilde{u} = u$  en  $\partial B$ . Definimos el *levantamiento armónico* de  $u$  en  $B$  por

$$U(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x), & x \in B, \\ u(x), & x \in \Omega - B. \end{cases}$$

Entonces  $U$  es subarmónica en  $\Omega$ .

- (d) Si  $u_1, \dots, u_N$  son subarmónicas en  $\Omega$ , entonces

$$u(x) = \max\{u_1(x), \dots, u_N(x)\}$$

es subarmónica en  $\Omega$ .

- (e) Enunciar y demostrar los correspondientes resultados para funciones superarmónicas.

16. *Principio débil del máximo*

Sea

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

donde  $a_{ij}, b_i$  y  $c$  son funciones continuas en  $\bar{\Omega}$  y  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . La matriz  $(a_{ij})$  es simétrica y definida positiva para cada  $x \in \bar{\Omega}$  (un operador  $\mathcal{L}$  con estas propiedades se dice *elíptico*). Probar que si  $\mathcal{L}u \geq 0$  en  $\Omega$  y  $c \equiv 0$  entonces el máximo de  $u$  se alcanza en  $\partial\Omega$ .

Sugerencia: Usar que si  $A, B$  son matrices simétricas y semidefinidas positivas de  $n \times n$ , entonces  $\text{tr}(AB) \geq 0$ . ¿Por qué es cierto?

17. (a) Sea  $\mathcal{L}u$  el operador definido en el ejercicio anterior y supongamos que  $c \leq 0$  in  $\Omega$ . Si  $\mathcal{L}u \geq 0$ , entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$$

donde  $u^+ = \max(u, 0)$ .

- (b) Dar un contraejemplo para (a) si  $c > 0$ .  
 (c) Sea  $\Omega$  acotado y  $c \leq 0$ . Si  $\mathcal{L}u = \mathcal{L}v$  en  $\Omega$  y  $u = v$  en  $\partial\Omega$  entonces  $u = v$  en  $\Omega$ .  
 (d) Dar un contraejemplo para (c) si  $\Omega$  no es acotado.

18. *Lema de Hopf*. Sea  $\Omega$  un dominio con la propiedad que para todo  $x_0 \in \partial\Omega$ , existe una bola  $B_r(y) \subset \Omega$  tal que  $x_0 \in \partial B_r(y)$  (esto se conoce como la propiedad de bola tangente interior). Sea  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  tal que  $\Delta u \geq 0$  en  $\Omega$ ,  $x_0 \in \partial\Omega$  y  $u(x_0) > u(x)$  para todo  $x \in \Omega$ . Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$$

19. Usar el lema de Hopf para dar otra demostración del principio fuerte del máximo.