

Ecuaciones Diferenciales – 1° cuatrimestre 2012
RESULTADOS PRELIMINARES

1. Revisar los siguientes teoremas:

- (a) Teorema de convergencia monótona de Beppo Levi.
- (b) Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.
- (c) Lema de Fatou.

2. Diferenciación bajo el signo integral.

- (a) Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $V \subset \mathbb{R}^m$ medible, $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ medible y $x_0 \in U$. Si $f(x, \cdot) \in L^1(V)$ para $|x - x_0| < \varepsilon$, $f(\cdot, y)$ es diferenciable en $|x - x_0| < \varepsilon$ para casi todo $y \in V$ y existe $g \in L^1(V)$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right| \leq g(y), \quad |x - x_0| < \varepsilon, \quad \text{a.e. } y \in V$$

con $1 \leq j \leq n$ fijo, entonces la función $F(x) = \int_V f(x, y) dy$ es derivable para $|x - x_0| < \varepsilon$ respecto de x_j , y

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_V \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dy.$$

- (b) Verificar que si $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ es una función continua en $U \times \bar{V}$, con V abierto acotado, entonces verifica las hipótesis del ítem anterior.

3. (a) Sean f, g derivables, h continua. Derivar

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(s) ds.$$

- (b) Sean f, g derivables, $h = h(x, s)$ continua y derivable respecto de x , $\frac{\partial h}{\partial x}$ acotada. Derivar

$$G(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(x, s) ds.$$

4. (a) Desigualdad de Hölder: Si $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

- (b) Desigualdad de Minkowsky: Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

- (c) Desigualdad integral de Minkowsky: Si $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\left(\int \left| \int f(x, y) dx \right|^p dy \right)^{1/p} \leq \int \left(\int |f(x, y)|^p dy \right)^{1/p} dx.$$

Definiciones: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Se define el *sopORTE* de f como $\text{sop}(f) = \overline{\{x \in U: f(x) \neq 0\}}$.

- $C^0(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ es continua}\} = C(U)$
- $C_c^0(U) := \{f \in C^0(U): \text{sop}(f) \text{ es compacto}\} = C_c(U)$
- $C^1(U) := \{f \in C^0(U): f \text{ es diferenciable en } U \text{ y } \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(U), 1 \leq i \leq n\}$
- $C^k(U) := \{f \in C^1(U): \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{k-1}(U), 1 \leq i \leq n\}, k \geq 1$
- $C^\infty(U) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(U)$
- $C_c^k(U) = C^k(U) \cap C_c^0(U), k \geq 1$
- $C_c^\infty(U) = C^\infty(U) \cap C_c^0(U)$
- $C^k(\bar{U}) = \bigcap_{\substack{V \text{ abierto} \\ \bar{U} \subset V}} C^k(V)$

Notación: La siguiente notación para las derivadas será de mucha utilidad. Sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multiíndice, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Definimos $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Entonces se denota, para $f \in C^{|\alpha|}(U)$,

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

5. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$, $\tau_{-h}f(x) := f(x+h)$.

- (a) Para $1 \leq p < \infty$, $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_{-h}f - f\|_p = 0$.
(Pista: usar que $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p < \infty$).
- (b) Mostrar que (a) no vale para $p = \infty$.

Definición: Dadas f, g medibles en \mathbb{R}^n se define la *convolución* de f y g como

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy$$

para los $x \in \mathbb{R}^n$ en donde la integral esté bien definida.

6. Desigualdad de Young.

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

7. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y se tiene que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$. Más aún, $f * g$ es uniformemente continua.

Definición: Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible. Definimos

$$L_{\text{loc}}^p(E) := \bigcap_{\substack{K \subset E \\ K \text{ compacto}}} L^p(K).$$

8. Sean $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ ($k \in \mathbb{N}$), $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$, $|\alpha| \leq k$.

9. (a) Sea

$$\rho(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

Probar que $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Construir $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{sop}(\rho) \subset B(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

10. Sea $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$, y $\forall \varepsilon > 0$. Sea $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)$. Probar que

(a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty \Rightarrow \|f * \rho_\varepsilon - f\|_p \rightarrow 0$ si $\varepsilon \rightarrow 0$.

(b) Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, f uniformemente continua en $V \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\sup_{x \in V'} |f * \rho_\varepsilon(x) - f(x)| \rightarrow 0$ si $\varepsilon \rightarrow 0$, $\forall V'$ compacto, $V' \subset V$.

(c) Si f es continua y acotada en \mathbb{R}^n , entonces $f * \rho_\varepsilon$ tiende uniformemente a f en cada compacto de \mathbb{R}^n .

(d) Si además $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(e) Calcular $f * \rho_\varepsilon$ si $f = \chi_{[a,b]}$ y ρ es la función del ejercicio 9 (a).

11. Demostrar que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$).

Pista: las funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto son densas en $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$).

12. Sea Ω un dominio de \mathbb{R}^n .

Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y $\int_\Omega f \varphi dx = 0 \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow f = 0$ c.t.p.

13. Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ y $\int f \varphi' dx = 0 \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f = \text{cte}$ c.t.p.

Pista: tomar $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\int g = 1$ y para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, se verifica que $\varphi(x) - (\int \varphi)g(x)$ es la derivada de una función $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Definición: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Diremos que Ω es un dominio con frontera C^r si es conexo y para todo $x_0 \in \partial\Omega$ existe un entorno U de x_0 , un entorno $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ y una función $\phi \in C^r(V)$ tal que (salvo un reordenamiento de las variables) el dominio se describe como sigue:

$$\begin{aligned}\Omega \cap U &= \{x \in U : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in V; x_n > \phi(x_1, \dots, x_{n-1})\}, \\ \partial\Omega \cap U &= \{x \in U : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in V; x_n = \phi(x_1, \dots, x_{n-1})\}.\end{aligned}$$

Notaciones:

- El operador *nabla* se define como

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

- Dada $u \in C^1(U)$ se define el *gradiente* de u como

$$\text{grad}(u) := \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

- Dada $\vec{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ con $f_i \in C^1(U)$ se define la *divergencia* de \vec{F} como

$$\text{div}(\vec{F}) := \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

- Dada $u \in C^2(U)$ se define el *laplaciano* u *operador de Laplace* de u como

$$\Delta u := \text{div}(\text{grad}(u)) = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

14. Fórmulas de Green

Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^n con frontera C^1

(a) si $\vec{V} = \vec{V}(x) = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x))$, $v_i \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $1 \leq i \leq n$, entonces

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{V}(x) dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V}(x) dx = \int_{\partial\Omega} \vec{V}(x) \cdot \nu(x) dS_x,$$

donde $\nu = \nu(x)$ es el vector normal exterior unitario a $\partial\Omega$.

(b) si $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

$$\int_{\Omega} (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS_x,$$

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS_x,$$

donde $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$.

15. Revisar los siguientes teoremas:

- (a) Teorema de la Función Inversa.
- (b) Teorema de la Función Implícita.
- (c) Teorema de Arzelá – Ascoli.
- (d) Teorema de la Partición de la Unidad.