

PRÁCTICA 2: CARDINALIDAD

“Llamaremos número cardinal de M al concepto general que, por medio de nuestra activa capacidad de pensar, surge del conjunto M cuando hacemos abstracción de la naturaleza y el orden de sus elementos. Denotamos el resultado de este doble acto de abstracción por \overline{M} ”
 GEORG CANTOR, 1895.

Propiedades básicas de los conjuntos

Ejercicio 1. Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos:

$$\text{i) } B - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B - A_i).$$

$$\text{ii) } B - \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B - A_i).$$

$$\text{iii) } \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) = B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right).$$

Ejercicio 2. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Hallar una familia de conjuntos $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que verifique simultáneamente:

- $B_n \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- $B_k \cap B_j = \emptyset$ si $k \neq j$.
- $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Ejercicio 3. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función y sean A y B subconjuntos de X .

i) Demostrar que:

$$\text{(a) } f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

$$\text{(b) } f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

ii) Generalizar al caso de uniones e intersecciones infinitas.

iii) Exhibir un ejemplo donde la inclusión en i).b). sea estricta.

Ejercicio 4. Sean $f : X \rightarrow Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Demostrar que:

$$\text{i) } A \subseteq f^{-1}(f(A)).$$

$$\text{ii) } f(f^{-1}(B)) \subseteq B.$$

- iii) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.
- iv) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
- v) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Generalizar (iv) y (v) al caso de uniones e intersecciones infinitas.

Ejercicio 5. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que $f(f^{-1}(B)) = B$ para cada $B \subseteq Y$ si y sólo si f es suryectiva.

Ejercicio 6. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

- (1) f es inyectiva.
- (2) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todos $A, B \subseteq X$.
- (3) $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subseteq X$.
- (4) $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ para todo par de subconjuntos A, B tales que $A \cap B = \emptyset$.
- (5) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ para todos $B \subseteq A \subseteq X$.

Ejercicio 7. Para cada subconjunto S de un conjunto A dado se define la *función característica* de S , $\mathcal{X}_S : A \rightarrow \{0, 1\}$, por

$$\mathcal{X}_S(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in S \\ 0 & \text{si } a \notin S \end{cases} .$$

Probar que:

- i) $\mathcal{X}_{S \cap T} = \mathcal{X}_S \cdot \mathcal{X}_T$ para todo par de subconjuntos $S, T \subseteq A$.
- ii) $\mathcal{X}_{A-S} = 1 - \mathcal{X}_S$ para todo $S \subseteq A$.
- iii) $\mathcal{X}_S + \mathcal{X}_T = \mathcal{X}_{S \cup T} + \mathcal{X}_{S \cap T}$ para todo $S, T \subseteq A$.

Cardinalidad

Ejercicio 8. Demostrar que si A es un conjunto de n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

Ejercicio 9. Sea A un conjunto. Probar que son equivalentes:

- (1) A es infinito (i.e. tiene un subconjunto en biyección con \mathbb{N}).
- (2) Para todo $x \in A$, existe una función $f_x : A \rightarrow A \setminus \{x\}$ biyectiva.
- (3) Para todo $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A$, existe una función $f_{\{x_1, \dots, x_n\}} : A \rightarrow A \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ biyectiva.

Ejercicio 10. Sea A un conjunto numerable. Supongamos que existe una función sobreyectiva de A en un conjunto B . Probar que B es a lo sumo numerable.

Ejercicio 11. Probar que los siguientes conjuntos son numerables (es decir, tienen cardinal \aleph_0):

$$\mathbb{Z}_{\leq -1} \ ; \ \mathbb{Z}_{\geq -3} \ ; \ 3.\mathbb{N} \ ; \ \mathbb{Z} \ ; \ \mathbb{N}^2 \ ; \ \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \ ; \ \mathbb{Q} \ ; \ \mathbb{N}^m \quad (m \in \mathbb{N})$$

Ejercicio 12.

- i) Sean A y B conjuntos a lo sumo numerables. Probar que $A \cup B$ es a lo sumo numerable.
- ii) Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos numerables. Probar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es numerable.
- iii) Sea \mathcal{A} un conjunto finito y $\mathcal{S} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^m$. Probar que $\#(\mathcal{S}) = \aleph_0$.

Deducir que, cualquiera sea el alfabeto utilizado, hay más números reales que palabras para nombrarlos. ¿Cuántos subconjuntos de \mathbb{N}^2 pueden ser definidos en un lenguaje fijo? ¿Cuántos hay en total?

Ejercicio 13. Sean A y B conjuntos disjuntos, A infinito y B numerable. Probar que:

- i) Existe una biyección entre $A \cup B$ y A .
- ii) Si A no es numerable y $B \subseteq A$, entonces existe una biyección entre $A - B$ y A .
¿Es numerable el conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$?

Ejercicio 14. Probar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable.**Ejercicio 15.** Se dice que un número complejo z es *algebraico* si existen enteros a_0, \dots, a_n no todos nulos, tales que

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$$

- i) Demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable.
- ii) Deducir que existen números reales que no son algebraicos.
NOTA: Estos números se llaman *trascendentes*.
- iii) Probar que, más aún, existen tantos números trascendentes como números reales.

Ejercicio 16. Sea $X \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ un conjunto de números reales positivos. Supongamos que existe una constante positiva C tal que para cualquier subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ vale $\sum_{i=1}^n x_i \leq C$. Probar que X es a lo sumo numerable.**Ejercicio 17.** Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que:

$$\#(\{x \in \mathbb{R} / f \text{ no es continua en } x\}) \leq \aleph_0.$$

Ejercicio 18. Probar que si A es un conjunto numerable, el conjunto de las partes finitas de A (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ formado por los subconjuntos finitos de A) es numerable.**Ejercicio 19.** Sean a, b, c cardinales. Probar que:

- i) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- ii) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$
- iii) $(a^b)^c = a^{bc}$
- iv) $(ab)^c = a^c \cdot b^c$
- v) Si $b \leq c$, entonces $a^b \leq a^c$ y $b^a \leq c^a$.

Ejercicio 20. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos de sucesiones:

- i) $\{(a_n) / a_n \in \mathbb{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.
- ii) $\{(a_n) \subseteq \mathbb{N} / a_n \leq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.
- iii) $\{(a_n) \subseteq \mathbb{N} / a_n \geq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.
- iv) $\{(q_n) \subseteq \mathbb{Q} / \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0\}$.
- v) $\{(q_n) \subseteq \mathbb{Q} / (q_n) \text{ es periódica}\}$.
- vi) $\{(a_n) \subseteq \mathbb{N} / 1 \leq a_n \leq m \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$. $(m \in \mathbb{N})$

Ejercicio 21. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:

- i) $\{I / I \text{ es un intervalo de extremos racionales}\}$.
- ii) $\{[a, b] / a, b \in \mathbb{R}\}$.
- iii) I , sabiendo que $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{R}$ es una familia de intervalos disjuntos.
- iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x + 2y \geq 7\}$.
- v) $\mathbb{R}_{>0}$.

Ejercicio 22. Probar que la unión numerable de conjuntos de cardinal c tiene cardinal c .

Ejercicio 23. Probar que $n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Ejercicio 24. Mostrar que \mathbb{R} es unión disjunta de c conjuntos de cardinal c .

Ejercicio 25. Se consideran los siguientes conjuntos de funciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbb{R}) &= \{f / f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} & \mathcal{F}(\mathbb{Q}) &= \{f / f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}\} \\ \mathcal{C}(\mathbb{R}) &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) / f \text{ es continua}\} & \mathcal{C}(\mathbb{Q}) &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}) / f \text{ es continua}\} \end{aligned}$$

- i) Probar que $\#(\mathcal{F}(\mathbb{R})) > c$.
- ii) Calcular $\#(\mathcal{F}(\mathbb{Q}))$.
- iii) Calcular $\#(\mathcal{C}(\mathbb{Q}))$.
- iv) Probar que la función $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ dada por $\phi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva. ¿Qué significa esto?
- v) Calcular $\#(\mathcal{C}(\mathbb{R}))$.

Ejercicio 26. Probar que el conjunto de partes numerables de \mathbb{R} (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ formado por todos los subconjuntos numerables de \mathbb{R}) tiene cardinal c .