Práctica 7: Medidas abstractas

Ejercicio 1. Probar que cada una de las siguientes ternas $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida. En cada caso encontrar todos los conjuntos de medida nula, calcular $L^1(\mu)$ y caracterizar $\int_X f d\mu$.

(a) **Medida de contar:** $X =$ un conjunto, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $\mu(E) = \#E \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$.

(b) **Medida de contar pesada:** dada una sucesión de números $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [0, \infty)$ (llamados pesos), sean $X = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mu(E) := \sum_{k\in E} a_k$.

(c) **Medida delta:** $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$ es la sigma-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue y $\mu = \delta$, donde
$$\delta(E) = \begin{cases} 1, & 0 \in E, \\ 0, & 0 \notin E. \end{cases}$$

(d) **Medida de Lebesgue pesada:** $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$ es la sigma-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue y $w : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ es una función medible (llamada peso) y
$$\mu(E) := \int_E w(x)dx.$$

Ejercicio 2. Probar que toda medida μ definida sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, es como la del ítem (b) del ejercicio anterior para una sucesión de pesos $(a_k)_k$ adecuada.

Ejercicio 3. Sea $\{a_{k,j} : k, j \in \mathbb{N}\} \subseteq [0, +\infty)$ una sucesión doblemente indexada tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $(a_{k,j})_{j\in\mathbb{N}}$ es creciente y converge a un cierto número $a_k \in [0, +\infty)$. Probar que,
$$\lim_{j\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Ejercicio 4. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta $Y \in \Sigma$ y $\mu(Y) = 0$. En este caso, probar que:

(a) Si $Z_1 \in \Sigma$, $Z_1\Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1\Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.

(b) Si f es medible y $f = g$ a.e., entonces g es medible.

Ejercicio 5. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ una función de conjuntos tal que:

(i) Si $A, B \in \mathcal{A}$ son disjuntos, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,

(ii) Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ y $A_n \searrow \emptyset$, entonces $\lim_n \mu(A_n) = 0$.

Probar que μ es una medida.

Ejercicio 6. (Pushforward de una medida). Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y μ una medida (no negativa) y finita sobre X. Sea $F : X \to \mathbb{R}^n$ una función medible. Probar que la fórmula,

$$\mu_F(E) := \mu(F^{-1}(E)),$$

define una medida sobre la sigma-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ tal que para toda función Borel medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no negativa vale que,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_F = \int_X f \circ F d\mu.$$

Concluir que una función Borel medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es integrable para μ_F si y sólo si $f \circ F$ es integrable para μ y que, en este caso, $\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_F = \int_X f \circ F d\mu$.

Ejercicio 7. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida positiva y finita. Sean $f \in L^1(X, \mu)$ y $S \subseteq \mathbb{C}$ cerrado tal que $\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S$ para todo $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$. Probar que $f(x) \in S$, para casi todo x (respecto de μ).

Ejercicio 8. Sea ν una medida con signo sobre el espacio medible (X, Σ). Sean A un conjunto positivo y B un conjunto negativo con respecto a ν tales que: $X = A \cup B$ y $A \cap B = \phi$. Dado $E \in \Sigma$, probar:

(a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$,

(b) $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \text{ínf}\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$.

Ejercicio 9. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, f tal que existe $\int_X f d\mu$ y $\nu(E) = \int_E f d\mu$ $(E \in \Sigma)$. Probar que:

(a) $\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu$ $(E \in \Sigma)$,

(b) $\nu^-(E) = \int_E f^- d\mu$ $(E \in \Sigma)$.

Ejercicio 10.

(a) Sean λ y μ medidas sobre (X, Σ) y $\lambda(X) < \infty$. Probar que

$$\lambda \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 :\ \mu(E) < \delta\ \Rightarrow\ \lambda(E) < \epsilon.$$

(b) Mostrar que sin la hipótesis $\lambda(X) < \infty$ (a) puede ser falso.

Ejercicio 11. Sean (X, Σ_1, μ) un espacio de medida finita y $f \in L^1(X, \mu)$. Sea Σ_2 una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X tal que $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$.

(a) Si $\mu_f(B) = \int_B f d\mu$ $(B \in \Sigma_2)$, entonces μ_f define una medida con signo sobre Σ_2, absolutamente continua con respecto a μ. Deducir que existe g Σ_2-medible tal que:

$$\int_B f d\mu = \int_B g d\mu \qquad (B \in \Sigma_2).$$

(b) Si $\Sigma_2 = \{\phi, B, B^c, X\}$ para algún $B \in \Sigma_1$, determinar la función g del inciso anterior.

Ejercicio 12. Sean X un conjunto y $A_1, \ldots, A_N$ subconjuntos disjuntos de X tal que $\cup_{i=1}^N A_i = X$. Sea Σ la $\sigma-$álgebra generada por $\{A_1, \ldots, A_N\}$. Probar que,

(a) $B \in \Sigma$ si y sólo si existen $i_1, \ldots, i_k$ tales que $B = \cup_{j=1}^k A_{i_j}$.

(b) Caracterizar las funciones $\sigma-$ medibles.

Ejercicio 13. Para cada uno de los siguientes espacios medibles $(X, \mathcal{A})$ y medidas λ, μ. Decidir si $\lambda \ll \mu$ y en caso de ser posible hallar una función densidad.

(a) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} =$ sigma-álgebra de Lebesgue, $\mu =$ medida de Lebesgue y $\lambda = \delta$.

(b) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} =$ sigma-álgebra de Lebesgue, $\lambda =$ medida de Lebesgue y $\mu =$ medida de contar. ¿Contradicen sus conclusiones el Teorema de Radon Nikodym?

(c) $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\lambda =$ medida de contar, $\mu =$ medida de contar con pesos $a_k = 1/2^k$.

Ejercicio 14. Sean (X, Σ) un espacio de medida, μ una medida finita y ν una medida signada definidas en Σ, tales que $\nu \ll \mu$.

(a) Probar que existe una función $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$\int f d\nu = \int f g d\mu \qquad , \forall f \text{ medible y tal que } \int f d\nu \text{ existe.}$$

(b) Probar que $\{x \in X : g(x) \geq 0\}$ y $\{x \in X : g(x) < 0\}$ son respectivamente un conjunto positivo y uno negativo para ν.

Ejercicio 15. (Descomposición polar de una medida compleja). Sean $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ una medida compleja. Llamemos $|\lambda|$ a su variación. Probar que existe una función medible $\rho : X \to \mathbb{C}$ tal que,

$$\lambda(E) = \int_E \rho d|\lambda|, \quad (E \in \mathcal{A}).$$

Probar que $|\rho| \equiv 1$ en casi todo punto y luego, $\left|\int_X f d\lambda\right| \leq \int_X |f| \, d\,|\lambda|$, para toda $f \in L^1(|\lambda|)$.

Ejercicio 16. Sean μ una medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}$ y m la medida de Lebesgue unidimensional. Definimos $f(x) = \mu((-\infty, x])$, $\quad -\infty < x < +\infty$.

(a) Pruebe que f es monótona creciente, $\mu((a, b]) = f(b) - f(a)$, f es continua por la derecha y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

(b) Pruebe que μ es absolutamente continua respecto de m si y sólo si f es una función absolutamente continua. Muestre que en ese caso, $\frac{d\mu}{dm} = f'$.

(c) Pruebe que μ es singular respecto m si y sólo si $f' = 0$ a.e. (sugerencia: considere un argumento similiar al usado para probar que las funciones monótonas son derivables en casi todo punto).