

PRÁCTICA 6: DIFERENCIACIÓN

Definiciones y notación: durante esta práctica se utilizarán las siguientes definiciones:

- $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ denotará el conjunto formado por aquellas funciones medibles que son integrables sobre todo compacto de \mathbb{R}^n .
- Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $M(f)$ denotará la función maximal de Hardy-Littlewood centrada, definida por

$$M(f)(x) = \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f| : Q \text{ un cubo centrado en } x \right\}.$$

Ejercicio 1. Probar que,

- (a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
- (b) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces $M(f)$ es semicontinua inferiormente.

Ejercicio 2. Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definimos,

$$M_Q(f)(x) = \sup \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B |f| : B \text{ una bola que contiene a } x \right\}.$$

Probar que existen constantes $A, B > 0$ que dependen sólo de n , tales que

$$AM(f)(x) \leq M_Q(f)(x) \leq BM(f)(x), \text{ para toda } f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Ejercicio 3.

- (a) Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible con $\text{diam}(E) < +\infty$. Probar que existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que $|E|c_1\|x\|^{-n} \leq M(\chi_E)(x) \leq |E|c_2\|x\|^{-n}$ para $\|x\|$ grande.
- (b) Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que satisface $|\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}| > 0$. Probar que existe $c > 0$ tal que $M(f)(x) \geq c\|x\|^{-n}$ para $\|x\| \geq 1$. Deducir que $M(f) \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, salvo que $f = 0$ en casi todo punto.

Ejercicio 4. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

- (a) Probar que si $1 \leq p < \infty$, existe $c > 0$ que no depende de f tal que para todo $\alpha > 0$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M(f)(x) > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\{x: |f(x)| \geq \alpha/2\}} |f(x)| dx.$$

(Sugerencia: Considerar $g = f\chi_{\{|f| \geq \alpha/2\}}$ y usar que $|f(x)| \leq |g(x)| + \alpha/2$.)

- (b) Probar que si $1 < p \leq \infty$, entonces $M(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Además existe $c_p > 0$ que no depende de f tal que $\|M(f)\|_p \leq c_p \|f\|_p$.

Ejercicio 5. Sea $\mathcal{S} = \{S_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos medibles. Decimos que \mathcal{S} se contrae regularmente a x si verifica

- (i) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $S_i \in \mathcal{S}$ con $\text{diam } S_i < \varepsilon$.
- (ii) Existe una constante $k > 0$ tal que para todo $S_i \in \mathcal{S}$, si Q_i es el cubo más pequeño con centro en x que contiene a S_i , entonces $|Q_i| \leq k|S_i|$.

Notar que los conjuntos S_i no necesitan contener a x .

- (a) Probar que $\{B(x, r)\}_{r>0}$ se contrae regularmente a x
- (b) Probar que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces en todo punto de Lebesgue de f

$$\frac{1}{|S|} \int_S |f(y) - f(x)| dy \rightarrow 0$$

para toda familia \mathcal{S} que se contrae regularmente a x .

Ejercicio 6. Sea $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ medible y acotada tal que $\text{sop}(\phi) \subseteq \{x : \|x\| \leq 1\}$ y $\int_{\mathbb{R}^n} \phi dx = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, sea $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi(x/\varepsilon)$. Probar que para toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * \phi_\varepsilon)(x) = f(x),$$

si x es un punto de Lebesgue de f .

Ejercicio 7. Sea $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible, acotada y de soporte compacto. Probar que existe una constante $C > 0$ tal que para toda función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$\sup_{\varepsilon > 0} |f * K_\varepsilon(x)| \leq CM(f)(x),$$

donde $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} K(x/\varepsilon)$.

Ejercicio 8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \sin(1/x), & x \neq 0. \end{cases}$$

Calcular los cuatro números de Dini f en $x_0 = 0$.

Ejercicio 9. Hallar $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ creciente, continua y tal que,

$$\int_0^1 f'(x) dx < f(1) - f(0).$$

Ejercicio 10. Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente y absolutamente continua con $g(a) = c$ y $g(b) = d$. Probar que,

- (a) Si $G \subseteq [c, d]$ es abierto, entonces $|G| = \int_{g^{-1}(G)} g'(x) dx$.
- (b) Sea $H = \{x : g'(x) \neq 0\}$. Si $E \subseteq [c, d]$ y $|E| = 0$ entonces $g^{-1}(E) \cap H$ tiene medida nula.
- (c) Si $E \subseteq [c, d]$ es medible, entonces $F = g^{-1}(E) \cap H$ es medible y $|E| = \int_F g' = \int_a^b \chi_E(g(x)) g'(x) dx$.

- (d) Si f es medible y no negativa sobre $[c, d]$, entonces $(f \circ g)g'$ es medible sobre $[a, b]$ y $\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$.

Ejercicio 11. Sean $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, absolutamente continua en $[a, b]$, g integrable sobre $[a, b]$ y

$$G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

Probar que

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b G(x)F'(x)dx.$$

Ejercicio 12. Probar que si f es de variación acotada en $[a, b]$, entonces f se puede escribir como $f = g + h$ donde g es absolutamente continua en $[a, b]$ y h es singular en $[a, b]$. Probar, además, que g y h son únicas salvo constantes aditivas.

Ejercicio 13. Sean $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ($n \in \mathbb{N}$) funciones monótonas crecientes tales que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a un límite finito para todo $x \in [0, 1]$. Sea $f(x)$ el límite. Probar que f es derivable a.e. y $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ a.e.

Ejercicio 14. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Sea $V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $V(x) := V_a^x(f)$. El objetivo de este ejercicio es probar que $V' = |f'|$ a.e. Para eso se propone el siguiente plan.

- (a) Dada una partición $a = x_0 < \dots < x_n = b$, existe una función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que,

- $g(0) = 0$,
- para cada $0 \leq j \leq n - 1$: $g(x_{j+1}) - g(x_j) = |f(x_{j+1}) - f(x_j)|$,
- para cada $0 \leq j \leq n - 1$: existe una constante $c_j \in \mathbb{R}$ tal que

$$g|_{[x_j, x_{j+1}]} = f|_{[x_j, x_{j+1}]} + c_j \text{ ó } g|_{[x_j, x_{j+1}]} = -f|_{[x_j, x_{j+1}]} + c_j.$$

- (b) Probar que toda función g como en (a) verifica que

- $|g'| = |f'|$ a.e.,
- $g(b) = \sum_{j=1}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)|$,
- $V - g$ es monótona creciente.

- (c) Elegir una sucesión de funciones g_k como en (a) tales que $\sum_k V(x) - g_k(x) < \infty$ para casi todo x y aplicar el ejercicio anterior.

Ejercicio 15. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Sea $V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $V(x) := V_a^x(f)$. Probar que,

- (a) f es continua si y sólo si V lo es.
 (b) f es absolutamente continua si y sólo si V lo es. Además en este caso,

$$V(x) = \int_a^x |f'(y)| dy, \text{ para todo } x \in [a, b].$$

(c) $\int_a^b |f'| \leq V_a^b(f)$ y la igualdad vale si y sólo si f es absolutamente continua.

Ejercicio 16. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función absolutamente continua. Probar que si $N \subseteq [a, b]$ tiene medida nula, entonces $f(N)$ tiene medida nula. Concluir que la imagen por f de un conjunto medible es un conjunto medible.

(Pista: la imagen por f un un intervalo $[c, d]$ es un intervalo de medida menor a la variación de f en $[c, d]$).