
ANÁLISIS MATEMÁTICO I (LIC. EN CS. BIOLÓGICAS)

Primer cuatrimestre 2012

Práctica 1: Funciones

Ejercicio 1. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $4x + 3 = -3$

(b) $5x + 3 = 8x + 1$

(c) $\frac{x-2}{7} + \frac{x-5}{8} = 3$

(d) $|x-2| = 1$

(e) $\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{10}{3}$

(f) $\frac{3}{13}x^2 - \frac{7}{5}x = 0$

(g) $22x^2 - 3x = 21x + 14x^2$

(h) $\frac{9}{x} - \frac{x}{x+4} = 1$

(i) $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+4} = 1$

Ejercicio 2. Resolver las siguientes inecuaciones:

(a) $4x + 3 \geq -3$

(b) $5x + 3 > 8x + 1$

(c) $\frac{2}{x+1} > 5$

(d) $\frac{3x-1}{-2} > 4$

(e) $5x - 3 \leq -8x + 1$

(f) $\frac{2x}{x+2} < 4$

(g) $\frac{3x+5}{x-2} \geq 1$

(h) $1 - \frac{x-1}{x} < -5$

(i) $|x-3| \leq 1$

(j) $|x+3| > 10$

(k) $|3x-1| > 2$

(l) $-2|5 - \frac{x}{2}| \geq 6$

(m) $|x| > |x+2|$

(n) $|3x-1| < |x-1|$

(ñ) $\left| \frac{x-2}{3x+1} \right| \leq 1$

(o) $|2-6x| + |3x-1| > 4$

(p) $\frac{x}{|x+4|} > 3$

(q) $\frac{2}{1-|x-2|} < 1$

(r) $\frac{|2x-8|}{1-|x-2|} < 1$

Ejercicio 3. Representar gráficamente en la recta numérica los conjuntos de números reales x que cumplen cada una de las siguientes condiciones:

- (a) x es mayor a -2 .
 (b) $4x + 3 \geq -3$
 (c) $-2 \leq x \leq 4$
 (d) $-3 \leq 2x + 3 < 3$
 (e) $-2 < -3x + 1 < 0$
 (f) $2x + 3 < -3x$
 (g) $2x + 3 \geq -3x$
 (h) $\frac{2x}{x+2} < 0$
 (i) $\frac{2x}{x+2} > 0$
 (j) $2x(x+5) = 0$
 (k) $x^2 - 49 = 0$
- (l) $x^2 - 49 > 0$
 (m) $x^2 - 49 < 0$
 (n) $(x-2)^2 > 25$
 (ñ) $\frac{3x-1}{-2} > 4$
 (o) $\frac{9}{x} - \frac{x}{3} < 2$
 (p) $|x-1| < 1$
 (q) $|x-3| < |2-x|$
 (r) $0 < x^2 \leq x^3$
 (s) $|x+3| + |x-9| > 2$
 (t) $||x+2| - |x-1|| < 1$
 (u) $|x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1$

Ejercicio 4. Se definen las siguientes funciones con valores reales:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \qquad g(x) = x^3 - 1$$

- (a) Calcular el valor de f en los puntos $0, \frac{1}{2}$ y 2 .
 (b) Para cada $a \in \mathbb{R}$ calcular $f(a)$ y $g(a+2)$.
 (c) Hallar las funciones $[f(x)]^2, f(g(x))$ y $g(f(x))$.

Ejercicio 5. Hallar el dominio natural de las siguientes funciones:

- (a) $f(x) = 2x + 1$
 (b) $f(x) = \sqrt{3-2x}$
 (c) $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+3}\sqrt{x-1}}$
 (d) $f(x) = \frac{1}{3x+4}$
 (e) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$
- (f) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x > 4 \\ \frac{1}{(x+3)(x+1)(x-5)} & \text{si } x \leq 4 \end{cases}$
 (g) $f(x) = \sqrt[4]{x}$
 (h) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$
 (i) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$
 (j) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+5x+8}$

$$(k) f(x) = \frac{x+3}{(x^2-4)(x+5)(x^2+5)}$$

$$(l) f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x \geq 1 \\ x+3 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Ejercicio 6. Graficar las siguientes funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(a) f(x) = 2$$

$$(d) f(x) = |x-1| + x$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -3 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ -x-1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Ejercicio 7. Hallar el dominio natural, el conjunto de ceros, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de cada una de las siguientes funciones.

$$(a) f(x) = 0$$

$$(f) f(x) = x^3 + 1$$

$$(k) f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$(b) f(x) = x$$

$$(g) f(x) = 2x - 1$$

$$(l) f(x) = \frac{x}{|x+1|}$$

$$(c) f(x) = -x$$

$$(h) f(x) = -2x^2 + 8x - 6$$

$$(m) f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$(d) f(x) = \sqrt{3-x}$$

$$(i) f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

$$(n) f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x\sqrt{x+5}}$$

$$(e) f(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x-3}$$

$$(j) f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

Ejercicio 8. Graficar en el mismo sistema de ejes cartesianos cada uno de los siguientes conjuntos de funciones con valores reales:

$$(a) f_1(x) = x, f_2(x) = x+2, f_3(x) = x-2, f_4(x) = -x, f_5(x) = -x+2, f_6(x) = -x-2.$$

$$(b) f_1(x) = |x|, f_2(x) = |x|+3, f_3(x) = |x|-3, f_4(x) = |x+3|, f_5(x) = |x-3|, f_6(x) = -|x|.$$

$$(c) f_1(x) = x^2, f_2(x) = x^2+1, f_3(x) = x^2-1, f_4(x) = (x+1)^2, f_5(x) = (x-1)^2.$$

$$(d) f_1(x) = x^2, f_2(x) = -x^2, f_3(x) = -x^2+1, f_4(x) = -x^2-1.$$

$$(e) f_1(x) = x^2-1, f_2(x) = 2(x^2-1), f_3(x) = \frac{1}{2}(x^2-1), f_4(x) = -1(x^2-1).$$

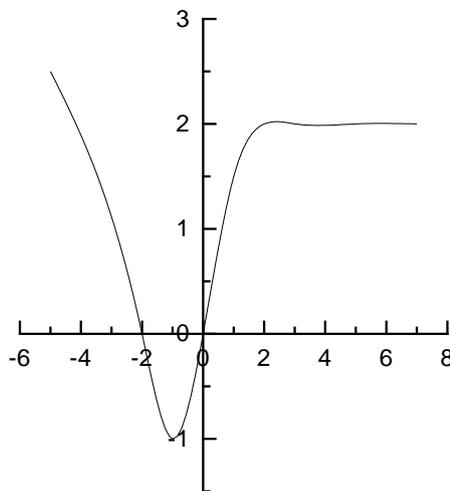
$$(f) f_1(x) = x^2-5x+4, f_2(x) = |x^2-5x+4|.$$

$$(g) f_1(x) = x^3, f_2(x) = x^3 + 1, f_3(x) = (x + 1)^3, f_4(x) = -x^3, f_5(x) = (x + 1)^3 - 2, \\ f_6(x) = |x^3|.$$

$$(h) f_1(x) = \frac{1}{x}, f_2(x) = \frac{1}{x} + 1, f_3(x) = \frac{1}{x-1}, f_4(x) = \frac{1}{x-2} - 3, f_5(x) = -\frac{1}{x}, \\ f_6(x) = -\frac{1}{x+2} + 3.$$

¿Qué conclusiones es posible obtener a partir de la observación comparativa de los gráficos de estas funciones?

Ejercicio 9. Considerando la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo gráfico es:



y teniendo en cuenta lo observado en el problema anterior, obtener los gráficos de las funciones:
 $f_1(x) = f(x) + 1$, $f_2(x) = f(x - 2)$, $f_3(x) = -f(x)$.

Ejercicio 10.

(a) A partir del gráfico de $f(x) = \sin(x)$ obtenga los gráficos de las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \sin(x) + 1 \quad f_2(x) = \sin(x) - 1 \quad f_3(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2}) \quad f_4(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}), \\ f_5(x) = -\sin(x) \quad f_6(x) = |\sin(x)| \quad f_7(x) = |\sin(x)| + 1 \quad f_8(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + 1.$$

(b) A partir del gráfico de $f(x) = \cos(x)$ obtenga los gráficos de las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \cos(x) + 2 \quad f_2(x) = \cos(x) - 2 \quad f_3(x) = \cos(x - \pi) \quad f_4(x) = \cos(x + \pi), \\ f_5(x) = -\cos(x) \quad f_6(x) = |\cos(x)| \quad f_7(x) = |\cos(x)| - 1 \quad f_8(x) = \cos(x + \pi) - 1.$$

Ejercicio 11. Consideremos las siguientes funciones con valores reales:

$$f(x) = x^2 + 2x, \quad g(x) = (x + 1)^{-1}, \quad h(x) = 3x - 2.$$

(a) Determinar el dominio natural de cada una de ellas.

(b) Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos y justificar.

- | | | |
|-----------------------------|----------------------|-----------------------|
| ▪ $-3 \in \text{Im}f$ | ▪ $0 \in \text{Im}g$ | ▪ $-1 \in \text{Im}g$ |
| ▪ $\text{Im}h = \mathbb{R}$ | ▪ $0 \in \text{Im}f$ | ▪ $5 \in \text{Im}g$ |

(c) Calcular si es posible:

- | | | |
|---------------------|--------------------|--------------------|
| ▪ $(g \circ f)(-1)$ | ▪ $(h \circ f)(7)$ | ▪ $(f \circ h)(7)$ |
| ▪ $(f \circ h)(1)$ | ▪ $(f \circ g)(3)$ | ▪ $(g \circ f)(6)$ |

(d) Dar las fórmulas que describan las relaciones funcionales de las siguientes composiciones:

- | | | |
|---------------|---------------|-------------------------|
| ▪ $f \circ g$ | ▪ $g \circ f$ | ▪ $g \circ h$ |
| ▪ $f \circ h$ | ▪ $f \circ f$ | ▪ $(f \circ g) \circ h$ |

¿Coinciden $f \circ g$ y $g \circ f$ como funciones?

Ejercicio 12. Determinar el dominio natural y la imagen de las siguientes funciones y estudiar su inyectividad y sobreyectividad.

(a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$

(b) $f(x) = \sqrt{x+2}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0; \\ x + 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0; \\ -x + 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Ejercicio 13. Demostrar la biyectividad de las siguientes funciones y determinar su inversa.

(a) $f(x) = 4x - 5$

(b) $f(x) = 3x - 2|x|$

Ejercicio 14. Calcular el dominio natural e imagen de las siguientes funciones y verificar que restringidas a dichos conjuntos resultan biyectivas. Encontrar sus inversas.

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$

(b) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

(c) $f(x) = \frac{3x^3}{x^3 - 1}$

Ejercicio 15. Determinar cuáles de las siguientes funciones son pares y cuáles son impares.

(a) $f(x) = x^2 + 2$

(d) $f(x) = x + x^4$

(b) $f(x) = 2x^3 - x$

(e) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

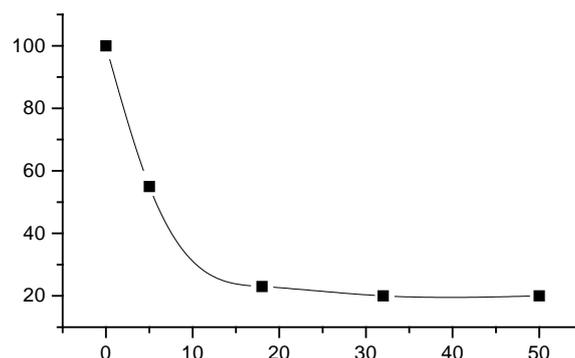
(c) $f(x) = \sin(2x)$

(f) $f(x) = x^2 + 2x - 4$

Ejercicio 16. En un recipiente que está en el fuego hay agua en ebullición. Cuando es retirado del fuego, durante los primeros 4 minutos se enfría rápidamente. En los 12 minutos siguientes la temperatura del agua sigue bajando más lentamente hasta estabilizarse a la temperatura ambiente (20°C). Trazar un gráfico que interprete esta evolución tomando la temperatura del líquido como función del tiempo.

Ejercicio 17.

- (a) Hacer un gráfico que refleje la evolución de la temperatura en función del tiempo de acuerdo con la siguiente descripción: “Se retira de fuego un jarro con agua hirviendo. Inicialmente la temperatura bajó con rapidez, de modo que a los 4 minutos era de 48° . Luego se fue enfriando más lentamente. A los 16 minutos del instante inicial la temperatura era de 24° y 16 minutos después llegó a 16° que era la temperatura del aire”.
- (b) El siguiente gráfico, ¿corresponde a los datos descriptos? ¿Coincide con el gráfico que Ud. ha hecho? ¿Son ambos posibles? (El eje x corresponde al tiempo y el eje y a la temperatura.)



Ejercicio 18. Cada m^2 de azulejos vale \$7 y su colocación cuesta \$15 (por m^2). El corralón recarga \$20 de flete.

- (a) Escribir la función que expresa el costo a partir de la superficie cubierta.
- (b) Señalar el dominio de esta función.
- (c) ¿Cuál es el costo de cubrir $12 m^2$?
- (d) ¿Cuántos m^2 de azulejos se puede colocar gastando \$460?

Ejercicio 19. Cuando producen una cantidad x (en miles de toneladas) de mercadería, los productores I y II reciben respectivamente beneficios mensuales (en miles de pesos) de :

$$p_I(x) = -x^2 + 8x - 7 \qquad p_{II}(x) = \frac{7}{6}x - 2$$

- (a) Graficar ambas funciones de ganancia.
- (b) ¿Cuántas toneladas deben producir ambos productores para obtener la misma ganancia?

Ejercicio 20. Un proyectil es disparado desde el suelo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de $120m/s$. La posición del proyectil a los t segundos está expresada por $h(t) = -4,9t^2 + 120t$.

- (a) ¿Para qué valores de t asciende el proyectil? ¿Para cuáles desciende?
- (b) Hallar el instante en el que el proyectil alcanza la altura máxima. Calcular esa altura.
- (c) Hallar el tiempo que demora el proyectil en llegar al suelo.
- (d) Si se efectúa otro disparo con la misma arma y en las mismas condiciones, pero desde $50m$ de altura, determinar la función que exprese su posición en el instante t . Responder a las preguntas (a), (b) y (c) en este caso.

Ejercicio 21. En una laguna se introdujeron 100 truchas. Al principio el cardumen creció rápidamente, pero después de un tiempo los recursos de la laguna escasearon y la población decreció. Si el número de truchas t años después de la siembra está expresado por $N(t) = -12t^2 + 21t + 100$ (donde $t > 0$).

- (a) Determinar los valores positivos de t para los cuales $N(t) > 0$.
- (b) ¿Se extingue la población de truchas? Si es así, ¿cuándo ocurre esto?

Ejercicio 22. La dosis recomendada de determinado medicamento (medida en mg) es una función lineal del peso x del paciente, expresado en kg . Sabemos que a un paciente de $10kg$ de peso se le debe administrar $23mg$ diarios de la sustancia, mientras que un paciente de $50kg$ de peso debe recibir $63mg$ del fármaco. Determinar la función que expresa la dosis correcta para un individuo que pese xkg . Graficar esta función.